الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية مستغانم — ثانوية المجاهد بخلوف محمد حميدة.

المستوى:ثالثة شعبة تسيير و إقتصاد — المدة : 02 سا

إختبار الفصل الأول في مادة الرياضيات

التمرين الأول: (5 نقاط)

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الإقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية، مع التبرير:

1. نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالشكل: $f(x)=x^2+2$ و ليكن (C_f) منحناها البياني.

• العدد المشتق للدالة f عند 1 يساوي:

أ) 1 ب) 2 ج) $-\frac{1}{2}$

• معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة A ذات الفاصلة 1 هي:

أ) $y=2x-1$ ب) $y=2x+1$ ج) $y=x+1$

2. لتكن (U_n) متتالية معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $U_n=n^2+n$.

• المتتالية (U_n) :

أ) حسابية ب) هندسية ج) لاحسابية و لاهندسية.

• المتتالية (U_n) :

أ) متزايدة تماما. ب) متناقصة تماما. ج) ليست رتيبة.

التمرين الثاني: (7 نقاط)

نعتبر المتتالية (U_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} U_0=6 \\ U_{n+1}=\frac{5}{3}U_n-\frac{1}{3} \end{cases}$

1. أحسب U_1، U_2 و U_3.

2. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $U_n>\frac{1}{2}$

3. استنتج أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما.

4. نعتبر المتتالية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $V_n=U_n-\frac{1}{2}$

(ا) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $V_{n+1}=\frac{5}{3}V_n$ ثم استنتج أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

(ب) أكتب V_n بدلالة n ثم استنتج U_n بدلالة n

(ج) نضع $S_n=V_0+V_1...+V_n$، بين أن $S_n=-\frac{33}{4}\left[1-\left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}\right]$

(د) استنتج بدلالة n المجموع S'_n حيث: $S'_n=U_0+U_1+...+U_n$

5. أكتب بدلالة n الجداء T_n حيث: $T_n=V_0\times V_1\times V_2\times...\times V_n$

التمرين الثالث: (8 نقاط)

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـــ: $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x+1}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

I) 1. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2. أحسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}-1} f(x)$ ثم فسر النتائج هندسيا.

3. عين الأعداد الحقيقية a، b و c بحيث يكون من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$:

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$$

4. بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x-1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f)

5. أدرس وضعية المنحى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

II) 1. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$: $f'(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$

2. عين إشارة $f'(x)$ ثم استنتج إتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

3. أكتب معادلة المستقيم (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

4. بين أن النقطة $A(-1;-2)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

5. أنشئ كل من (Δ)، (T) و (C_f).

تصحيح الإختبار الأول في مادة الرياضيات

للسنة الثالثة تسيير و إقتصاد

التمريـــــن (1)

إختيار الإجابة الصحيحة مع التعليل:

1 نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالشكل: $f(x) = x^2 + 2$ و ليكن $(\mathcal{C}_f)$ منحناها البياني.

• العدد المشتق للدالة f عند 1 يساوي: **ب) 2**

التبرير:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2+2h+3-3}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(h+2)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}(h+2) = 2$$

• معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة A ذات الفاصلة 1 هي:

ب) $y = 2x + 1$

التبرير:

$$(T)\ y = f'(1)(x-1) + f(1)$$
$$= 2(x-1) + 3$$
$$= 2x - 2 + 3$$
$$= 2x + 1$$

2 لتكن (U_n) متتالية معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $U_n = n^2 + n$.

• المتتالية (U_n) **ج) لاحسابية و لاهندسية.**

التبرير: $u_0 = 0 \quad u_1 = 2 \quad u_2 = 6$

⋆ لدينا: $u_0 + u_2 \neq 2u_1$ ومنه المتتالية (U_n) ليست حسابية.

⋆ لدينا: $u_0 \times u_2 \neq (u_1)^2$ ومنه المتتالية (U_n) ليست هندسية.

إذن المتتالية (U_n) ليست حسابية و ليست هندسية.

• المتتالية (U_n) **أ) متزايدة تماما.**

التبرير:

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + n + 1 - (n^2 + n)$$
$$= n^2 + 2n + 1 + n + 1 - n^2 - n$$
$$= 2n + 2 > 0$$

التمريـــــن (2)

$$\begin{cases} U_0 = 6 \\ U_{n+1} = \frac{5}{3}U_n - \frac{1}{3} \end{cases}$$

1 حساب الحدود:

لدينا $u_1 = \frac{5}{3}u_0 - \frac{1}{3}$

ومنه $u_1 = \frac{5}{3}\times 6 - \frac{1}{3}$

$u_1 = \frac{30-1}{3} = \frac{29}{3}$

لدينا $u_2 = \frac{5}{3}u_1 - \frac{1}{3}$

ومنه $u_2 = \frac{5}{3}\times\frac{29}{3} - \frac{1}{3}$

$u_2 = \frac{145-3}{9} = \frac{142}{9}$

لدينا $u_3 = \frac{5}{3}u_2 - \frac{1}{3}$

ومنه $u_3 = \frac{5}{3}\times\frac{142}{9} - \frac{1}{3}$

$u_3 = \frac{710-9}{27} = \frac{701}{27}$

2 البرهان بالتراجع

نسمي $P(n)$ الخاصية $\left(u_n \geq \frac{1}{2}\right)$

المرحلة الأولى :

التحقق من صحة الخاصية من أجل $n = 0$ أي $P(0)$

لدينا $u_0 = 6$ ومنه $u_0 \geq \frac{1}{2}$

وعليه $P(0)$ صحيحة.

المرحلة الثانية:

نفرض صحة الخاصية $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي $u_n \geq \frac{1}{2}$

و نثبت أن $P(n+1)$ صحيحة، أي $u_{n+1} \geq \frac{1}{2}$

لدينا $u_n \geq \frac{1}{2}$

ومنه $\frac{5}{3}u_n \geq \frac{5}{6}$

ومنه $\frac{5}{3}u_n - \frac{1}{3} \geq \frac{5}{6} - \frac{1}{3}$

أي $\frac{5}{3}u_n - \frac{1}{3} \geq \frac{1}{2}$

إذن $P(n+1)$ صحيحة.

الخلاصة:

من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n \geq \frac{1}{2}$

استنتاج أن (u_n) متزايدة تماما :

لدينا $u_{n+1} - u_n = \frac{5}{3}u_n - \frac{1}{3} - u_n$

ومنه $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n - \frac{1}{3}$

و لدينا $u_n \geq \frac{1}{2}$

ومنه $\frac{2}{3}u_n \geq \frac{1}{3}$

$\frac{2}{3}u_n - \frac{1}{3} \geq 0$

و عليه المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

4 أ/ تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1}=\frac{5}{3}v_n$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1}-\frac{1}{2} \\ &= \frac{5}{3}u_n-\frac{1}{3}-\frac{1}{2} \\ &= \frac{5}{3}u_n-\frac{5}{6} \\ &= \frac{5}{3}\left(u_n-\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{3}}\right) \\ &= \frac{5}{3}\left(u_n-\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{5}{3}v_n \end{aligned}$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{5}{3}$ وحدها الأول $v_0=\frac{11}{2}$

4 ب/ كتابة v_n بدلالة n:

$v_n=v_0q^n$ ومنه $v_n=\frac{11}{2}\left(\frac{5}{3}\right)^n$

استنتاج u_n بدلالة n:

$$\begin{aligned} u_n &= v_n+\frac{1}{2} \quad \text{لدينا} \\ &= \frac{11}{2}\left(\frac{5}{3}\right)^n+\frac{1}{2} \quad \text{ومنه} \end{aligned}$$

4 ج/ حساب S_n :

$$\begin{aligned} S_n &= v_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \\ &= \frac{11}{2}\times\frac{1-\left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{5}{3}} \\ &= \frac{11}{2}\times\frac{1-\left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}}{-\frac{2}{3}} \\ &= -\frac{11}{2}\times\frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}\right] \\ &= -\frac{33}{4}\left[1-\left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}\right] \end{aligned}$$

4 د/ استنتاج S'_n :

$$\begin{aligned} S'_n &= u_0+u_1+\ldots+u_n \\ &= \left(v_0+\frac{1}{2}\right)+\left(v_1+\frac{1}{2}\right)+\ldots+\left(v_n+\frac{1}{2}\right) \\ &= (v_0+v_1+\ldots+v_n)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{33}{4}\left[1-\left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}\right]+\frac{1}{2}\times(n+1) \end{aligned}$$

4 كتابة الجداء T_n بدلالة n :

$$\begin{aligned} v_0\times v_1\times\ldots\times v_n &= v_0\times(v_0q)\times(v_0q^2)\times\ldots\times v_0q^n \\ &= (v_0\times\ldots\times v_0)(q\times q^2\times\ldots\times q^n) \\ &= v_0^{n+1}q^{1+2+\ldots+n} \\ &= v_0^{n+1}q^{\frac{n(n+1)}{2}} \\ &= \left(\frac{11}{2}\right)^{n+1}\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} \end{aligned}$$

التمريـــــن (3)

$(I$

1 حساب نهايات الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

2 أ) حساب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1}f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}-1}f(x)$:

- $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1}f(x)=\frac{4}{0^+}=+\infty$
- $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}-1}f(x)=\frac{4}{0^-}=-\infty$

ب) التفسير الهندسي :

المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

3 تعيين الأعداد الحقيقية a، b و c :

$$\begin{aligned} f(x) &= ax+b+\frac{c}{x+1} \\ &= \frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1} \\ &= \frac{ax^2+ax+bx+b+c}{x+1} \\ &= \frac{ax^2+(a+b)+b+c}{x+1} \end{aligned}$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=4 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} a=1 \\ a+b=0 \\ b+c=3 \end{cases}$

4 تبيان أن المستقيم (Δ) مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) :

لدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty}[f(x)-y] &= \lim_{x\to-\infty}\left[x-1+\frac{4}{x+1}-(x-1)\right] \\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y] = \lim_{x\to+\infty}\left[x-1+\frac{4}{x+1}-(x-1)\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x+1}$$
$$= 0$$

منه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x-1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$

5 دراسة الوضع النسبي للمستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) :

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$، $f(x)-y=\frac{4}{x+1}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$		$+$
الوضع النسبي	(C_f)تحت (Δ)		(C_f)فوق(Δ)

II)

1 تبيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$ ، $f'(x)=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$:

$$f'(x) = \frac{2x(x+1)-(1)(x^2+3)}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{2x^2+2x-x^2-3}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$$

2 أ) دراسة إشارة $f'(x)$:

بما أن المقام موجب فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

ب) استنتاج إتجاه التغير:

الدالة f متزايدة تماما على المجالين $[-3;-\infty[$ و $]1;+\infty[$، و متناقصة تماما على المجالين $]-1;-3]$ و $[1;-1[$

ج) جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-6	↘	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

3 معادلة المماس (T) :

$$(T): \quad y = f'(0)(x-0)+f(0)$$
$$= -3x+3$$

4 إثبات أن النقطة $A(-1;-2)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) :

لدينا من أجل كل $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$ فإن $-2-x\in\mathbb{R}-\{-1\}$

$$f(-2-x)+f(x) = -2-x-1+\frac{4}{-2-x+1}+x-1+\frac{4}{x+1}$$
$$= -4+\frac{-4}{x+1}+\frac{4}{x+1}$$
$$= \frac{4}{x+1} = -4 = 2\times(-2)$$

ومنه النقطة $A(-1;-2)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f)

5 الإنشاء :