الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية بلخير جلول -اولاد محمد-

امتحان الفصل الأول

الشعبة: علوم تجريبية + تقني رياضي

السنة الدراسية: 2024/2023

يوم الاثنين: 2023/12/04

اختبار في مادة : الرياضيات

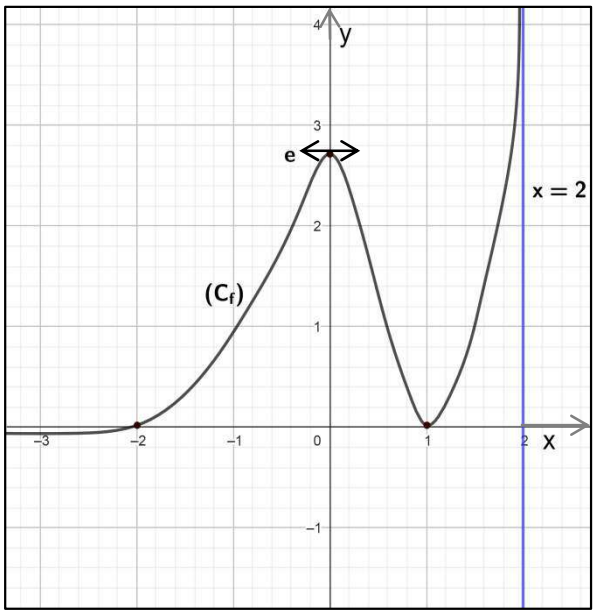
المدة: 02 سا

التمرين الأول : (5نقاط)

يمثل الشكل المقابل منحنى الدالة f المعرفة على $]-\infty;2[$ حيث المستقيمين (Δ) ذو المعادلة $x=2$ و حامل محور الفواصل مقاربين له.

g الدالة العددية المعرفة بـ: $g(x)=\ln[f(x)]$

لكل سؤال جواب واحد صحيح ، اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المقترحة مع التعليل في كل حالة :



1) الدالة g معرفة على المجال :

أ) $]-2;2[$ ب) $]-2;1[$ ج) $]-2;1[\cup]1;2[$

2) الدالة g قابلة للإشتقاق عند "0" و :

أ) $g'(0)=1$ ب) $g'(0)=0$ ج) $g'(0)=e$

3) المعادلة $g(x)=1$ تقبل:

أ) حل وحيد ب) حلين ج) 3 حلول

4) نهاية $g(x)$ لما $x\to -2$ هي :

أ) $-\infty$ ب) $+\infty$ ج) 0

5) المنحنى (C_g) يقبل مستقيماً مقارباً معادلته :

أ) $x=0$ ب) $x=2$ ج) $x=-1$

التمرين الثاني : (6نقاط)

f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-2+2\ln x$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

2) أدرس تغيرات الدالة f .

3) برهن أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث : $\alpha<2$.

4) استنتج إشارة $f(x)$.

5) أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) الذي يشمل النقطة $(0;-2)$.

التمرين الثالث : (9نقاط)

I) نعتبر الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=(x-1)e^x-1$

1) أحسب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها.

2) احسب g' ثم استنتج تغيرات الدالة g .

3) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث: $1.2<\alpha<1.3$

4) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

II) لتكن f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{2x}{e^x+1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) عين نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{-2g(x)}{\left(e^x+1\right)^2}$

جـ)استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

د) بين أن $f(\alpha)=2(\alpha-1)$ ثم استنتج حصراً لـ $f(\alpha)$.

2) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x$ مقارب لـ (C_f) عند $-\infty$.

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ).

3) أ) بين أن: $f(-\alpha)=-2$.

ب) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماس (T) موازي للمستقيم (Δ) في النقطة ذات الفاصلة $-\alpha$ ثم أكتب معادلته.

4) انشئ (Δ)، (T) و (C_f).

5) ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $2x\left(\dfrac{1}{e^x+1}-1\right)=m$.

انتهى الموضوع

تصحيح اختبار في مادة الرياضيات

التمرين الأول: (05 نقاط)

$g(x) = \ln[f(x)]$

① g معرفة على D_f أي $f(x) > 0$ أي على $]-2;1[\cup]1;2[$

② الاختبار الصحيح هو: (ج).

③ الاختبار الصحيح هو: (ب) لأن:

$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$; $g'(0) = \frac{f'(0)}{f(0)} = 0$

④ المعادلة $g(x) = 1$

الاختبار الصحيح هو: (ج) لأن

$\ln[f(x)] = 1$ أي: $f(x) = e$

ومنه المعادلة تقبل حلين

⑤ الاختبار الصحيح هو: (أ) لأن:

$\lim_{x \to -2} g(x) = \lim_{x \to -2} \ln f(x)$.

$= \lim_{t \to 0} \ln t = -\infty$

⑥ الاختبار الصحيح هو: (ب)

$\lim_{x \to 2} g(x) = \lim_{x \to 2} \ln f(x) = +\infty$

لأن $\lim_{x \to 2} f(x) = +\infty$

التمرين الثاني: (06 نقاط)

$f(x) = x - 2 + 2\ln x$

① حساب النهايات:

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (x - 2 + 2\ln x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x\left(1 - \frac{2}{x} + 2\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

② الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$

$f'(x) = 1 + \frac{2}{x} > 0$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

③ f مستمرة ورتيبة تماما على $]0;+\infty[$

ومنه f مستمرة ورتيبة على $]0;+\infty[$

$f(2) = 2\ln 2$ ④ و $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$

ولدينا $0 \in]-\infty; 2\ln 2[$

أي: $0 \in]-\infty; f(2)[$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد α حيث $\alpha < 2$

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	

⑤ استنتاج إشارة $f(x)$

⑥ معادلة المماس (T) الذي يشمل $(0;-2)$

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$-2 = \left(1 + \frac{2}{x_0}\right)(-x_0) + x_0 - 2 + 2\ln x_0$

$-2 = -x_0 + 2 + x_0 - 2 + 2\ln x_0$

$2\ln x_0 = 2$ ، $\ln x_0 = 1$

أي $x_0 = e$

ب/ تبيان أن $f'(x)=\frac{-2g(x)}{(e^x+1)^2}$

$$f'(x)=\frac{2(e^x+1)-e^x(2x)}{(e^x+1)^2}$$

$$=\frac{2e^x+2-2xe^x}{(e^x+1)^2}=\frac{-2(e^x(x-1)-1)}{(e^x+1)^2}=\frac{-2g(x)}{(e^x+1)^2}$$

إشارة f' من إشارة $-2g(x)$ وهذه الأخيرة من إشارة $(e^x+1)^2>0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$-2g(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$f(\alpha)$	↘ 0
التقعر	f متناقصة تماما		f متزايدة تماما

ج- تبيان أن $f(\alpha)=2(\alpha-1)$

لدينا $g(\alpha)=0$ إذن $e^\alpha=\frac{1}{\alpha-1}$ بالتعويض نجد

$$f(\alpha)=\frac{2\alpha}{\frac{1}{\alpha-1}+1}=\frac{2\alpha}{\frac{1+\alpha-1}{\alpha-1}}$$

$$f(\alpha)=2(\alpha-1)$$

حصر $f(\alpha)$:

$$0,4<f(\alpha)<0,6$$

② تبيان أن $(D): y=2x$ مقارب لـ (C_f) في $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2x}{e^x+1}-2x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2x-2xe^x+2x}{e^x+1}\right]=0$$

ومنه (D) مستقيم مقارب لـ (C_f).

دراسة الوضعية النسبية لـ (C_f) و (D) ندرس إشارة الفرق:

$$\frac{-2xe^x}{e^x+1}$$

إشارة الفرق من إشارة $-2x$ إذ $e^x>0$, $e^x+1>0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-2x$	$+$	0	$-$
الوضعية	(C_f) فوق (D)	تقاطع $(0;0)$	(C_f) تحت (D)

$$y=f'(e)(x-e)+f(e)$$

$$=\left(1+\frac{2}{e}\right)(x-e)+e-2+2\ln e$$

$$=x-e+\frac{2}{e}x+2+e-2+2$$

$$y=\left(1+\frac{2}{e}\right)x+2$$

التمرين الثالث:

(أ) $g(x)=(x-1)e^x-1$

① حساب النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[(x-1)e^x-1\right]=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[xe^x-e^x-1\right]=-1$$

$$g'(x)=e^x+(x-1)e^x=(1+x-1)e^x$$

$$g'(x)=xe^x$$ وهذه إشارة g' من إشارة x, $e^x>0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	-1 ↘	-2	↗ $+\infty$

g مستمرة ورتيبة تماما على $]-\infty;0]$ ومنه $g(]-\infty;0])=[-2;-1[$ و $0\notin[-2;-1[$ إذن المعادلة $g(x)=0$ لا تقبل حلا على $]-\infty;0]$

g مستمرة ورتيبة تماما على $[0;+\infty[$ ومنه $g([0;+\infty[)=[-2;+\infty[$ و $0\in[-2;+\infty[$ إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على $[0;+\infty[$

$g(1,2)=-0,33$ و $g(1,3)=0,1$

$g(x)=0$ أي $g(1,2)\times g(1,3)<0$ و g مستمرة ورتيبة تماما على $]1,2;1,3[$

تقبل حلا وحيدا α حيث $1,2<\alpha<1,3$

③ إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

II

$$f(x)=\frac{2x}{e^x+1}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x}{e^x+1}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{x\left(\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x}\right)}\right)=0$$

ج) بيان أن $f(-\alpha)=-2$

$f(-\alpha)=\dfrac{-2\alpha}{e^{-\alpha}+1}=\dfrac{-2\alpha}{\alpha-1+1}=-2$; $e^{-\alpha}=\alpha-1$

إذن $f(-\alpha)=-2$

ب/ تبيان أن (C_f) يقبل مماسا (T) موازي لـ (Δ) معناه

$f'(x_0)=2$ أي: $\dfrac{-2g(x_0)}{(e^{x_0}+1)^2}=2$

ومنه $-g(x_0)=(e^{x_0}+1)^2$

$-(x_0-1)e^{x_0}+1=e^{2x_0}+1+2e^{x_0}$

$-x_0e^{x_0}+e^{x_0}+1=e^{2x_0}+1+2e^{x_0}$

$e^{x_0}(-x_0+1-2-e^{x_0})=0$

$-e^{x_0}(x_0+1+e^{x_0})=0$

إذن $-e^{x_0}\neq 0$ ، $e^{x_0}+x_0+1=0$

لدينا $e^{-\alpha}=-1+\alpha$ ولدينا

$e^{-\alpha}-\alpha+1=-1+\alpha-\alpha+1=0$

إذن $-\alpha$ حل للمعادلة $e^{x_0}+x_0+1=0$

معناه $x_0=-\alpha$

معادلته $y=f'(-\alpha)(x+\alpha)+f(-\alpha)$

$y=2x+2\alpha-2$

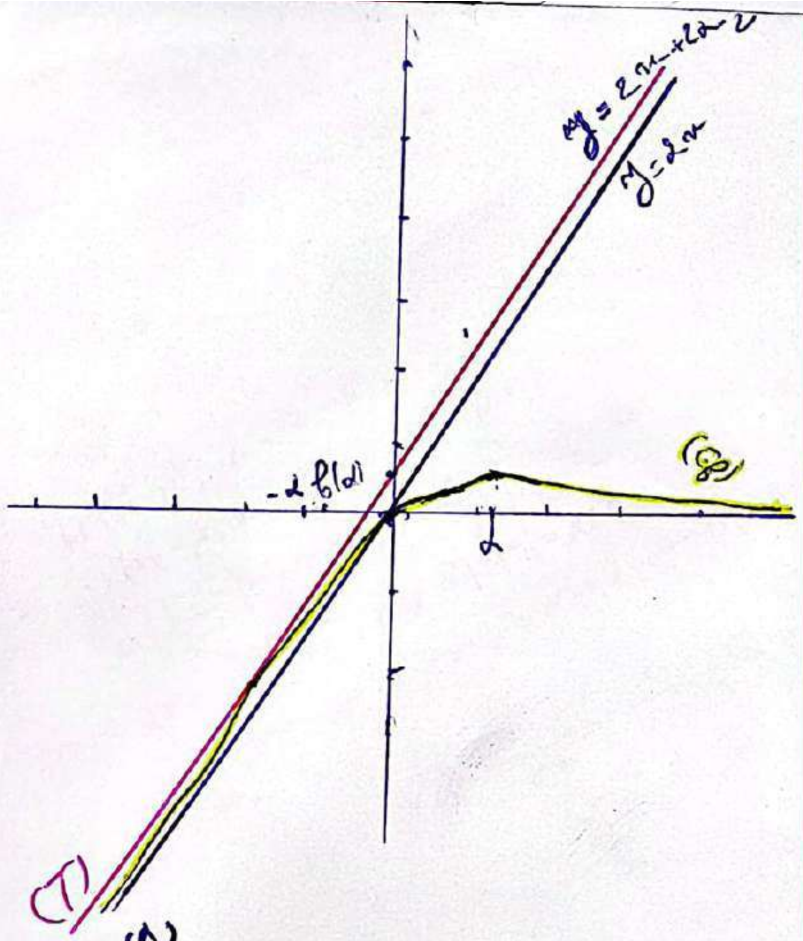
6) إنشاء (C_f) ، (Δ) و (T)

2b) تبيان أن $f'(-\alpha)=2$

$f'(-\alpha)=\dfrac{-2g(-\alpha)}{(e^{-\alpha}+1)^2}=\dfrac{-2(-\alpha e^{-\alpha}-e^{-\alpha}-1)}{(e^{-\alpha}+1)^2}$

$=\dfrac{-2(-\alpha(\alpha-1)-(\alpha-1)-1)}{(\alpha-1+1)^2}$

$=\dfrac{-2(-\alpha^2+\alpha-\alpha+1-1)}{\alpha^2}=2$



5) المناقشة حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة

$2x\left(\dfrac{1}{e^x+1}-1\right)=m$

$\dfrac{2x}{e^x+1}-2x=m$; $\dfrac{2x}{e^x+1}=2x+m$

أي $f(x)=2x+m$

* لما $m\in\,]-\infty;0[$ المعادلة تقبل حل وحيد موجب
* لما $m=0$ " " " " معدوم
* لما $2\alpha-2<m<0$ المعادلة تقبل حلين

لما $m=2\alpha-2$ " " حل وحيد

لما $m>2\alpha-2$ " لا تقبل حلول.