الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية بلخير جلول -اولاد محمد-

امتحان الفصل الأول

الشعبة: علوم تجريبية + تقني رياضي

السنة الدراسية: 2024/2023

يوم الاثنين: 2023/12/04

اختبار في مادة : الرياضيات

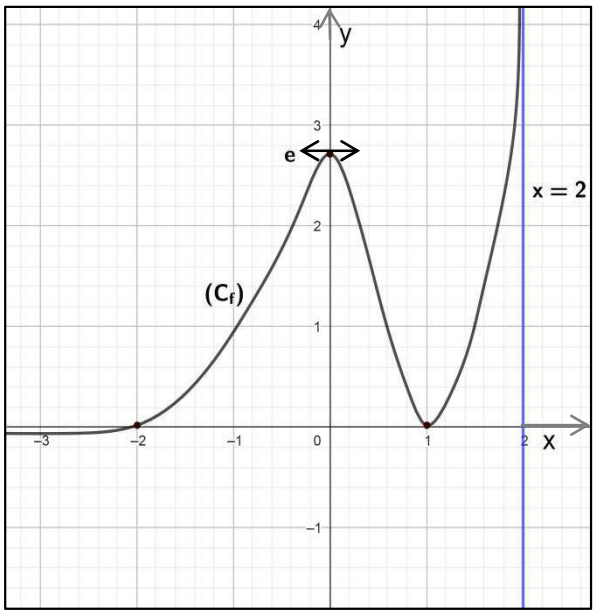
المدة: 02 سا

التمرين الأول : (5نقاط)

يمثل الشكل المقابل منحنى الدالة f المعرفة على $]-\infty;2[$ حيث المستقيمين (Δ) ذو المعادلة $x=2$ و حامل محور الفواصل مقاربين له.

g الدالة العددية المعرفة بـ: $g(x)=\ln[f(x)]$

لكل سؤال جواب واحد صحيح ، اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المقترحة مع التعليل في كل حالة :



1) الدالة g معرفة على المجال :

أ) $]-2;2[$ ب) $]-2;1[$ ج) $]-2;1[\cup]1;2[$

2) الدالة g قابلة للإشتقاق عند "0" و :

أ) $g'(0)=1$ ب) $g'(0)=0$ ج) $g'(0)=e$

3) المعادلة $g(x)=1$ تقبل:

أ) حل وحيد ب) حلين ج) 3 حلول

4) نهاية $g(x)$ لما $x\to -2$ هي :

أ) $-\infty$ ب) $+\infty$ ج) 0

5) المنحنى (C_g) يقبل مستقيماً مقارباً معادلته :

أ) $x=0$ ب) $x=2$ ج) $x=-1$

التمرين الثاني : (6نقاط)

f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-2+2\ln x$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

2) أدرس تغيرات الدالة f.

3) برهن أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث : $\alpha<2$.

4) استنتج إشارة $f(x)$.

5) أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) الذي يشمل النقطة $(0;-2)$.

التمرين الثالث : (9نقاط)

I) نعتبر الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=(x-1)e^x-1$

1) أحسب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها.

2) احسب g' ثم استنتج تغيرات الدالة g.

3) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث: $1.2<\alpha<1.3$

4) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

II) لتكن f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{2x}{e^x+1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) عين نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{-2g(x)}{\left(e^x+1\right)^2}$

جـ)استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

د) بين أن $f(\alpha)=2(\alpha-1)$ ثم استنتج حصراً لـ $f(\alpha)$.

2) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x$ مقارب لـ (C_f) عند $-\infty$.

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ).

3) أ) بين أن: $f(-\alpha)=-2$.

ب) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماس (T) موازي للمستقيم (Δ) في النقطة ذات الفاصلة $-\alpha$ ثم أكتب معادلته.

4) انشئ (Δ)، (T) و (C_f).

5) ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $2x\left(\dfrac{1}{e^x+1}-1\right)=m$.

انتهى الموضوع

تصحيح اختبار في مادة الرياضيات

التمرين الأول: (06 نقاط)

$g(x) = \ln[f(x)]$

① مجموعة تعريف g: $f(x) > 0$ أي $]-2;1[\cup]1;2[$

② الاختيار الصحيح (ج).

③ الاختيار الصحيح هو: (ب) لأن:

$g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$; $g'(0) = \dfrac{f'(0)}{f(0)} = 0$

④ المعادلة $g(x) = 1$

الاختيار الصحيح هو: (ج) لأن

$\ln[f(x)] = 1$ أي: $f(x) = e$

ومنه المعادلة تقبل حلين

⑤ الاختيار الصحيح هو: (أ) لأن:

$\lim\limits_{x \to -2} g(x) = \lim\limits_{x \to -2} \ln f(x)$.

$= \lim\limits_{t \to 0} \ln t = -\infty$

⑥ الاختيار الصحيح هو: (ب)

$\lim\limits_{x \to 2} g(x) = \lim\limits_{x \to 2} \ln f(x) = +\infty$

لأن $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = +\infty$

التمرين الثاني: (06 نقاط)

$f(x) = x - 2 + 2\ln x$

① حساب النهايات:

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (x - 2 + 2\ln x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 - \dfrac{2}{x} + 2\dfrac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

② اتجاه تغير الدالة f:

$f'(x) = 1 + \dfrac{2}{x} > 0$ على $]0;+\infty[$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$
$f(x)$	$\|\|$ ↘	↗

ومنه f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

③ f مستمرة ورتيبة على $]0;+\infty[$

$f(2) = 2\ln 2$ و $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$

أي: $0 \in]-\infty ; 2\ln 2[$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد α حيث $\alpha < 2$

④ إشارة $f(x)$

x	0	α	$+\infty$
$f(x)$	$\|\|$	$-$	$+$

⑤ معادلة المماس (T) الذي يشمل $(0;-2)$

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$-2 = \left(1 + \dfrac{2}{x_0}\right)(-x_0) + x_0 - 2 + 2\ln x_0$

$-2 = -x_0 + 2 + x_0 - 2 + 2\ln x_0$

$2\ln x_0 = 2$ ، $\ln x_0 = 1$

أي $x_0 = e$

ب/ تبيان أن $f'(x)=\frac{-2g(x)}{(e^x+1)^2}$

$$f'(x)=\frac{2(e^x+1)-e^x(2x)}{(e^x+1)^2}$$

$$=\frac{2e^x+2-2xe^x}{(e^x+1)^2}=\frac{-2(e^x(x-1)-1)}{(e^x+1)^2}=\frac{-2g(x)}{(e^x+1)^2}$$

إشارة f' من إشارة $-2g(x)$ لأن $(e^x+1)^2>0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$-2g(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$f(\alpha)$	↘ 0
	f متناقصة تماما		f متناقصة تماما
	$]-\infty;\alpha]$		$]\alpha;+\infty[$

ج- تبيان أن $f(\alpha)=2(\alpha-1)$

لدينا $g(\alpha)=0$ إذن $e^\alpha=\frac{1}{\alpha-1}$ بالتعويض نجد

$$f(\alpha)=\frac{2\alpha}{\frac{1}{\alpha-1}+1}=\frac{2\alpha}{\frac{1+\alpha-1}{\alpha-1}}$$

$$f(\alpha)=2(\alpha-1)$$

حصر $f(\alpha)$:

$$0,4<f(\alpha)<0,6$$

② تبيان أن $(\Delta): y=2x$ مقارب لـ (C_f) في $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2x}{e^x+1}-2x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2x-2xe^x+2x}{e^x+1}\right]=0$$

ومنه (Δ) مستقيم مقارب لـ (C_f).

دراسة الوضعية النسبية لـ (C_f) و (Δ) ندرس إشارة الفرق:

$$\frac{-2xe^x}{e^x+1}$$

إشارة الفرق من إشارة $-2x$ إذ $e^x>0$, $e^x+1>0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-2x$	$+$	0	$-$
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)	تقاطع $(0;0)$	(C_f) تحت (Δ)

$y=f'(e)(x-e)+f(e)$

$=\left(1+\frac{2}{e}\right)(x-e)+e-2+2\ln e$

$=x-e+\frac{2}{e}x+2+e-2+2$

$y=\left(1+\frac{2}{e}\right)x+2$

التمرين الثالث:

I/ ① $g(x)=(x-1)e^x-1$

حساب النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}[(x-1)e^x-1]=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}[xe^x-e^x-1]=-1$$

$g'(x)=e^x+(x-1)e^x=(1+x-1)e^x$

$g'(x)=xe^x$ ومنه إشارة g' من إشارة x لأن $e^x>0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	-1 ↘	-2	↗ $+\infty$

جدول تغيرات الدالة g

$g(1,2)=-0,33$ و $g(1,3)=0,1$

$g(x)=0$ أي $g(1,2)\times g(1,3)<0$

نقبل حلا وحيدا α حيث $1,2<\alpha<1,3$

③ إشارة $g(x)$:

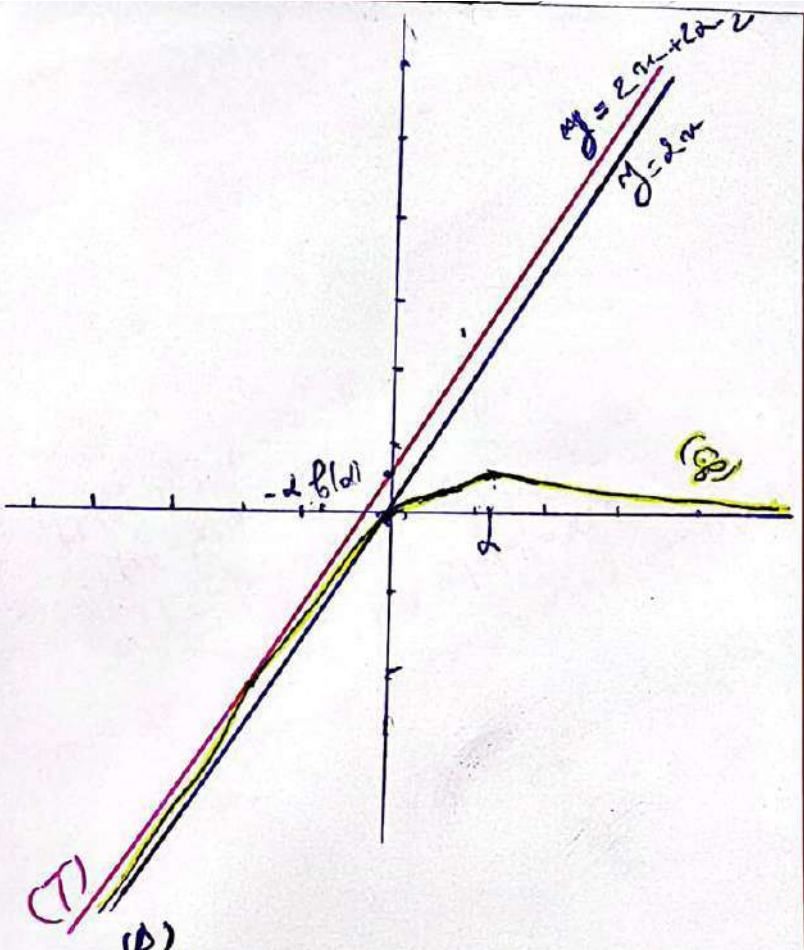
x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

II

$$f(x)=\frac{2x}{e^x+1}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x}{e^x+1}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{x\left(\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x}\right)}\right)=0$$



$f(-\alpha)=-2$ أن (C_f) بيان

$$f(-\alpha)=\frac{-2\alpha}{e^{-\alpha}+1}=\frac{-2\alpha}{\alpha-1+1}=-2e^{-\alpha}=\alpha-1$$

إذن $\underline{f(-\alpha)=-2}$

بما أن (C_f) يقبل مماسا (T) موازي لـ (Δ) معناه:

$f'(x_0)=2$ أي: $\frac{-2g(x_0)}{(e^{x_0}+1)^2}=2$

$-g(x_0)=(e^{x_0}+1)^2$ ومنه

$-(x_0-1)e^{x_0}+1=e^{2x_0}+1+2e^{x_0}$

$-x_0e^{x_0}+e^{x_0}+1=e^{2x_0}+1+2e^{x_0}$

$e^{x_0}(-x_0+1-\alpha-e^{x_0})=0$

$-e^{x_0}(x_0+1+e^{x_0})=0$

$e^{x_0}+x_0+1=0$ إذن $-e^{x_0}\neq 0$

لدينا $e^{-\alpha}=-1+\alpha$ ولدينا

$e^{-\alpha}-\alpha+1=-1+\alpha-\alpha+1=0$

إذن $-\alpha$ حل المعادلة $e^{x_0}+x_0+1=0$

معناه $\underline{x_0=-\alpha}$

معادلة $y=f'(-\alpha)(x+\alpha)+f(\alpha)$

$\boxed{y=2x+2\alpha-2}$

ب) لما (C_f)، (Δ)، (T) متمايزة

$f'(-\alpha)=2$ لدينا

$$f'(-\alpha)=\frac{-2g(-\alpha)}{(e^{-\alpha}+1)^2}=\frac{-2(\alpha e^{-\alpha}-e^{-\alpha}-1)}{(e^{-\alpha}+1)^2}$$

$$=\frac{-2(-\alpha(\alpha-1)-(\alpha-1)-1)}{(e^{-\alpha}+1)^2}$$

$$=\frac{-2(-\alpha^2+\alpha-\alpha+1-1)}{\alpha^2}=2$$

ج) المناقشة حسب قيم m عدد حلول المعادلة

$2x\left(\frac{1}{e^x+1}-1\right)=m$

$\frac{2x}{e^x+1}-2x=m$; $\frac{2x}{e^x+1}=2x+m$

$f(x)=2x+m$ أي

* لما $m\in]-\infty;2[$ المعادلة تقبل حل وحيد موجب

* معدوم $\Leftarrow$ $\Leftarrow$ $\Leftarrow$ $\Leftarrow$ $m=0$ لما

* لما $2<m<2\alpha-2$ المعادلة تقبل حلين

* لما $m=2\alpha-2$ $\Leftarrow$ $\Leftarrow$ حل وحيد

* لما $m>2\alpha-2$ لا تقبل حلول.