

● التمرين الأول: (07 نقاط)

لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة على المجموعة $\mathbb{N}$ بـ :

$$u_0 = 6 \text{ و بالعلاقة التراجعية : } u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3 \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n.$$

(1) أحسب u_3, u_2, u_1 .

(2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n \geq 4$.

(3) بين أن (u_n) متتالية متناقصة . هل (u_n) متتالية متقاربة ؟ عين نهايتها .

(4) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n - 4$.

(أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدها الأول v_0 .

(ب) أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

(ج) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 4$ ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(د) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

● التمرين الثاني: (06 نقاط)

I. (u_n) المتتالية الحسابية المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة : $\begin{cases} u_2 + u_4 = 4 \\ u_0 = -1 \end{cases}$.

(1) عين أساس هذه المتتالية مستنتجا اتجاه تغيرها.

(2) أكتب u_n بدلالة n .

(3) احسب المجموع S_n بدلالة n حيث : $S_n = \left(u_1 + \frac{1}{2}\right) + \left(u_2 + \frac{1}{2}\right) + \dots + \left(u_n + \frac{1}{2}\right)$.

II. (v_n) متتالية عددية معرفة بالعلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} v_{n+1} = (a^2 - 3)v_n + 2a^2 - a \\ v_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

a عدد حقيقي

(1) عين قيمة a بحيث تكون (v_n) متتالية حسابية

(2) عين قيمة a بحيث تكون (v_n) متتالية هندسية.

● التمرين الثالث: (07 نقاط):

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + 1}$.

و لكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. أحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$ ، ثم فسر هذه النتيجة بيانيا .

2.أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{-4(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$.

- ب- عين اشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$.
3. أكتب معادلة المماس (T) عند النقطة $\omega(0;1)$.
4. عين نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل . (إرشاد: حل المعادلة: $f(x) = 0$)
5. أرسم المماس (T) و المنحنى (C_f) .

انتهى الموضوع

بالتوفيق للجميع ... أستاذ المادة : شعبان



$$\text{لدينا } u_0 = 6 \text{ و } u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3$$

1. حساب الحدود :

$$u_1 = \frac{1}{4}(6) + 3 = \frac{9}{2}$$

$$u_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{9}{2}\right) + 3 = \frac{33}{8}$$

$$u_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{33}{8}\right) + 3 = \frac{129}{32}$$

2. البرهان بالترجع:

من أجل: $n = 0$ لدينا: $u_0 = 6 \geq 4$

نفرض أن فرضية التراجع صحيحة: $u_n \leq 4$ من أجل كل عدد طبيعي n و نتحقق من صحتها من

أجل الرتبة $n+1$ أي: $u_{n+1} \geq 4$

3. اثبات أن (u_n) متتالية متناقصة

$$\text{لدينا : } u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3 \text{ بما أن : } a = \frac{1}{4} > 0 \text{ و } u_1 - u_0 = \frac{9}{2} - 6 = \frac{-3}{2} < 0$$

اذن (u_n) متتالية متناقصة.

بما أن (u_n) متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل فانها متقاربة.

$$4. v_n = u_n - 4$$

$$\text{أبما أن : } \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{4}$$

$$\text{اذن } (v_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } \frac{1}{4} \text{ و حدها الأول: } v_0 = u_0 - 4 = 6 - 4 = 2$$

$$\text{ب- عبارة الحد العام للمتتالية } (v_n) : v_n = 2\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0 \text{ لأن: } 0 < q < 1$$

$$\text{ج. } u_n = v_n + 4 = 2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 4$$

$$\text{و منه: } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 4 = 4$$

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

$$\text{د. حساب المجموع: } S_n = 2\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}}\right) + 4(n+1)$$

$$= \frac{8}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) + 4n + 4$$

I. المتتالية الحسابية المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة: $\begin{cases} u_2 + u_4 = 4 \\ u_0 = -1 \end{cases}$.

(1) أساس هذه المتتالية: $u_2 = u_0 + 2r = -1 + 2r$
 $u_4 = u_0 + 4r = -1 + 4r$

و بالتعويض نجد: $r = 1$

بما أن: $r = 1 > 0$ فإن (u_n) متتالية متزايدة

(2) أكتب u_n بدلالة n . $u_n = -1 + n$

(3) احسب المجموع S_n بدلالة n حيث: $S_n = \left(u_1 + \frac{1}{2}\right) + \left(u_2 + \frac{1}{2}\right) + \dots + \left(u_n + \frac{1}{2}\right)$.

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \frac{1}{2}n$$

$$= n \left(\frac{u_1 + u_n}{2} \right) + \frac{1}{2}n$$

$$= n \left(\frac{-1 + n}{2} \right) + \frac{1}{2}n$$

II. متتالية عددية معرفة بالعلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} v_{n+1} = (a^2 - 3)v_n + 2a^2 - a \\ v_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

a عدد حقيقي

(1) تعين قيمة a بحيث تكون (v_n) متتالية حسابية:

يعني العلاقة التراجعية يجب أن تكتب من الشكل: $v_{n+1} = v_n + 2a^2 - a$ أي: $(a^2 - 3) = 1$ نقوم بحل

المعادلة نجد: $a = -2, a = 2$.

(2) تعين قيمة a بحيث تكون (v_n) متتالية هندسية.

يعني العلاقة التراجعية يجب أن تكتب من الشكل: $v_{n+1} = (a^2 - 3)v_n$ أي: $2a^2 - a = 0$ نقوم بحل

المعادلة نجد: $a = \frac{1}{2}, a = 0$.

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + 1}$.

1. أحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$ ،

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

التفسير البياني:

المستقيم ذا المعادلة $y = 1$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $-\infty$ و $+\infty$ ،

2. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{-4(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2}$.

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{-4(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2}$

ب- عين إشارة $f'(x)$

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $(x^2 - 1)^2 > 0$ وبالتالي: إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط أي:

$-4(x^2 - 1)$: (لاحظ جدول الإشارة)

شكل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		1	$f(-1)$	$f(1)$	1	

$$f(1) = 3$$

$$f(-1) = -1$$

3. أكتب معادلة المماس (T) عند النقطة $\omega(0;1)$.

$$(T) : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$y = 4x + 1$$

4. عين نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل . (إرشاد: حل المعادلة: $f(x) = 0$)

$$f(x) = 0.$$

تكافئ: $x^2 + 4x + 1 = 0$ وبالتالي حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل.

$A(-2 - 2\sqrt{3}; f(-2 - 2\sqrt{3}))$ و $B(-2 + 2\sqrt{3}; f(-2 + 2\sqrt{3}))$

5. رسم المماس (T) و المنحنى (C_f) .

