



## المستوى الثالثة ثانوي شعبة رياضيات

## اختبار الفصل الأول في مادة الرياضيات

2سا

التمرين الأول : ( 4.5 نقاط )

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير بدقة:

1. المتتالية  $(v_n)$  هندسية حدودها موجبة تماما، حيث:  $v_0 \times v_2 = 576$  و  $v_0 + v_1 = 30$ .

$$v_{n+1} - v_n = 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

2. نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $]0; +\infty[$  بـ:  $f(x) = \log^2(x) + 2 \log(x) - 3$ . مجموعة حلول المتراجحة  $f(x) \leq 0$  هي:

$$S = [10^{-3}; 10]$$

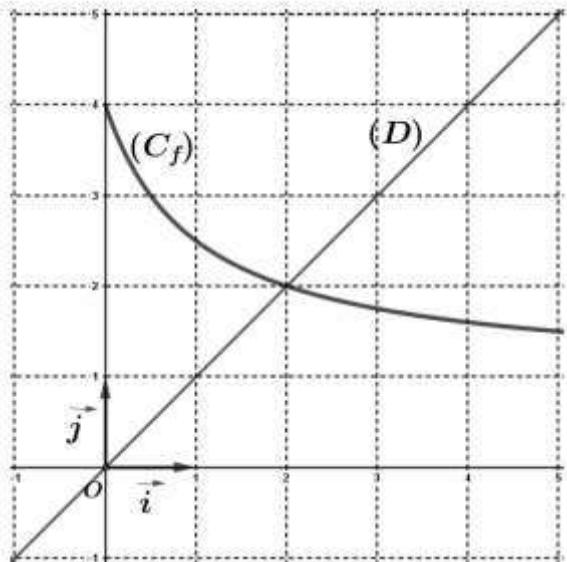
3. الحل الخاص للمعادلة التفاضلية:  $-y' + \ln(2^y) - 2 = 0$  هو الدالة  $g$  بحيث:

$$g(0) = 2024 + \frac{2}{\ln 2} \text{ المعرفة بـ: } g(x) = 2023e^{2x} + \frac{2}{\ln 2}$$

التمرين الثاني : ( 5.5 نقاط )1)  $f$  الدالة المعرفة على  $]0; +\infty[$  بـ:  $f(x) = \frac{x+4}{x+1}$  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامدوالمجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ،  $(D)$  المستقيم ذو المعادلة  $y = x$  $(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة بـ:

$$u_0 = 0 \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} = f(u_n)$$

(أ) أعد رسم الشكل على ورقة الإجابة ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود الأربعة الأولى (دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل)

(ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  وتقاربها.2)  $(v_n)$  المتتالية العددية المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ:  $v_n = \frac{u_{n-2}}{u_{n+2}}$ 

(أ) بين أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $\frac{1}{3}$  - يطلب تعيين حدها الأول  $v_0$

(ب) عين عبارة الحد العام  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $u_n = -2 + \frac{4}{1 + (-\frac{1}{3})^n}$

(ج) أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(3) نضع: من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$  و  $T_n = \frac{1}{u_0+2} + \frac{1}{u_1+2} + \dots + \frac{1}{u_n+2}$

احسب  $S_n$  بدلالة  $n$  ثم بين أنه: من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $T_n = \frac{1}{16} \left[ 4n + 7 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right]$

### التمرين الثالث: ( 10 نقاط )

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة كما يلي:  $f(x) = \ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)$

$(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

(1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  فإن:  $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = (\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1$ ، ثم استنتج أن  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$

(2) أ- أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ب- أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة بيانياً.

(3) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  فإن:  $f(x) = x + \ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right)$

ب- استنتج أن المستقيم  $(\Delta)$  الذي معادلته  $y = x$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  عند  $+\infty$

ج- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $[0; +\infty[$ ،  $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 \leq e^x$

د- استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $[0; +\infty[$ ،  $f(x) \leq x$ ، مفسراً النتيجة بيانياً

(4) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$ :  $f'(x) = \frac{\sqrt{e^x}(\sqrt{e^x}-1)}{e^x-2\sqrt{e^x}+2}$

ب- أدرس إشارة  $f'(x)$  ثم استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  وشكل جدول تغيراتها.

(5) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $f''(x) = -\frac{\sqrt{e^x}[(\sqrt{e^x}-2)^2-2]}{2(e^x-2\sqrt{e^x}+2)^2}$

ب- استنتج أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيين إحداثيهما

(6) أنشئ كلا من  $(\Delta)$  و  $(C_f)$

(7) ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$ ، عدد حلول المعادلة:  $e^x - e^m = 2(-1 + \sqrt{e^x})$

## التصحيح النموذجي

### التمرين الأول :

(1) خطأ :  $v_{n+1} - v_n = 18 \times 4^n$

(2) صحيح :  $S = [10^{-3} ; 10]$

(3) خطأ :  $g(x) = 2024 \times 2^x + \frac{2}{\ln 2}$

### التمرين الثاني :

(1) أ- تمثيل الحدود الأربعة الأولى على محور الفواصل

ب- التخمين: المتتالية  $(u_n)$  ليست رتيبة ومتقاربة

(2) أ-  $v_0 = -1$  و  $v_{n+1} = -\frac{1}{3}v_n$

ب- من أجل كل  $n \in \mathbb{N}$  :  $v_n = -\left(-\frac{1}{3}\right)^n$  ،  $u_n = -2 + \frac{4}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$

ج-  $\lim(u_n) = 2$  لأن  $\lim\left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$

(3)  $S_n = -\frac{3}{4}\left[1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$  ،  $T_n = \frac{1}{4}[n + 1 - S_n]$

ومنه  $T_n = \frac{1}{16}\left[4n + 7 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]$

### التمرين الثالث :

(1) من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  لدينا:  $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = e^x - 2\sqrt{e^x} + 1 + 1 = (\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1$

بما أن  $(\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1 > 0$  من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  فإن  $D_f = \mathbb{R}$

(2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ln(2)$  ،  $(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب موازي لمحور الفواصل عند  $+\infty$  معادلته  $y = \ln(2)$

(3) أ- من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $f(x) = x + \ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right)$

ب-  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = 0$  ومنه المستقيم  $(\Delta)$  الذي معادلته  $y = x$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  عند  $+\infty$

ج- من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $[0; +\infty[$  ،  $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 \leq e^x$

د- من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $[0; +\infty[$  :  $f(x) - y = \ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) - x$

ومنه :  $f(x) - y = \ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) - \ln(e^x)$

ومنه:  $f(x) - y = \ln\left(\frac{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2}{e^x}\right)$  بما أن  $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 \leq e^x$  فإن  $\frac{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2}{e^x} \leq 1$  ومنه

$$\ln\left(\frac{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2}{e^x}\right) \leq 0$$

أي  $f(x) \leq x$

$(C_f)$  يقع أسفل  $(\Delta)$  على المجال  $[0; +\infty[$

(4) أ- من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f'(x) = \frac{\sqrt{e^x}(\sqrt{e^x}-1)}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2}$

ب- إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $(\sqrt{e^x} - 1)$  لأن  $\sqrt{e^x} > 0$  و  $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 > 0$

على المجال  $]-\infty; 0]$  ،  $f'(x) < 0$

على المجال  $]0; +\infty[$  ،  $f'(x) > 0$

الدالة  $f$  متناقصة تماما على المجال  $]-\infty; 0]$

الدالة  $f$  متزايدة تماما على المجال  $]0; +\infty[$

الدالة  $f$  تقبل قيمة حدية محلية صغرى من أجل  $x = 0$

تشكيل جدول تغيرات الدالة  $f$

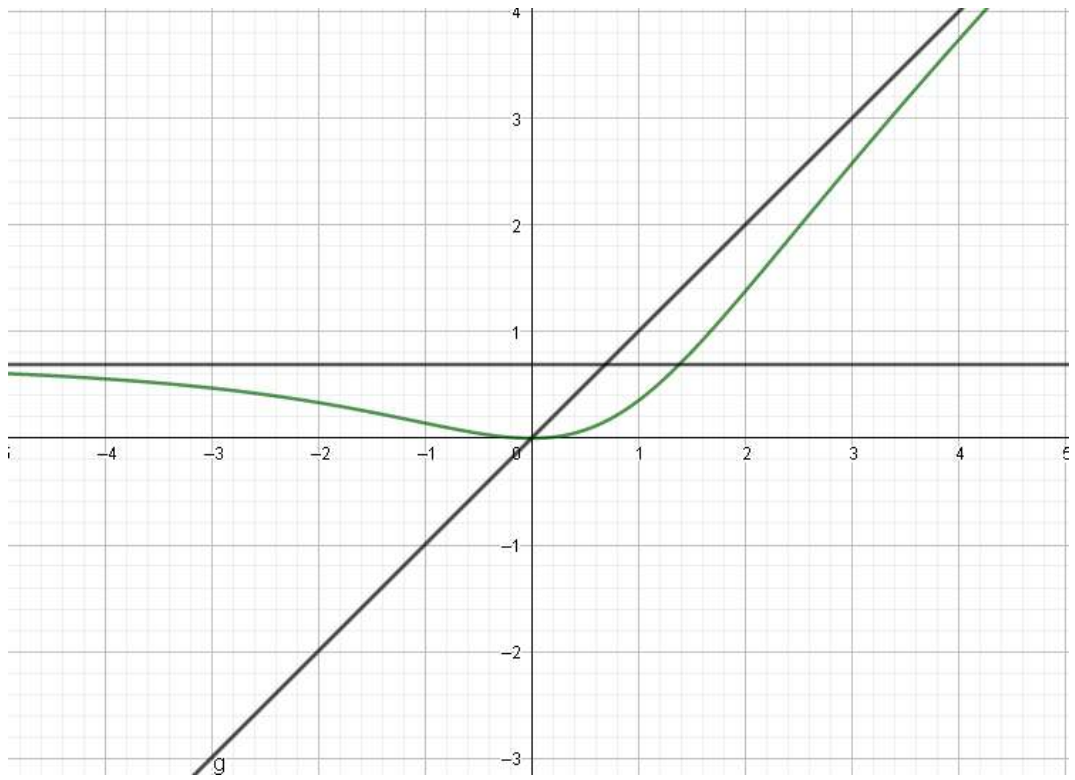
(5) أ- من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $f''(x) = -\frac{\sqrt{e^x}[(\sqrt{e^x}-2)^2-2]}{2(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)^2}$

$f''(x)$  تنعدم عند القيمتين  $x_1 = 2\ln(2 + \sqrt{2})$  و  $x_2 = 2\ln(2 - \sqrt{2})$  مغيرة إشارتها

ب- ومنه  $(C_f)$  يقبل نقطتي إنعطاف عند النقطتين :  $A(2\ln(2 + \sqrt{2}); \ln(4 + 2\sqrt{2}))$  و

$B(2\ln(2 - \sqrt{2}); \ln(4 - 2\sqrt{2}))$

(6) الإنشاء:



(7

$$f(x) = m \text{ تكافئ } e^x - e^m = 2(-1 + \sqrt{e^x})$$

$m = 0$  حل وحيد

$0 < m < \ln 2$  حلين متميزين

$m \geq \ln 2$  حل وحيد