

الاعمال الأولى في مادة الرياضيات

المدة: ساعتان

المستوى: الثالثة رياضيات و تقني رياضي

كل إجابة تقدم على ورقة المحاولة لا تصحح

التمرين الأول : 13

الجزء الأول :

لنكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (x^2 - 2x + e)e^x + e - 1$

1- ادرس تغيرات الدالة g .

2- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x) > e - 1$

- استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

الجزء الثاني :

لنكن f الدالة المعرفة على المجال $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{-x^2 + ex}{x-1} - \ln(e^{-x} + 1)$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم بين أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = e - 1$

- استنتج المستقيمات المقاربة لمنحنى الدالة f .

2- بين أنه من أجل كل x من $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{-g(x)}{(x-1)^2(e^x + 1)}$

3- استنتج اتجاه التغير الدالة f , ثم شكل جدول تغيراتها.

4- بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x + e - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

5- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و λ حيث : $-0,3 < \alpha < -0,5$ و $2,6 < \lambda < 2,7$.

6- ضع النتيجة دون حساب $\lim_{x \rightarrow \lambda} \frac{f(x) - f(\lambda)}{x - \lambda}$, ثم فسر النتيجة هندسيا.

7- انشاء كلا من المستقيمات المقاربة والمنحنى (C_f) .

8- ناقش بيانيا حسب قيم العدد الحقيقي الموجب تماما λ عدد حلول المعادلة : $e^{\frac{-x^2 + ex}{x-1}} = \frac{\lambda}{e^x} + \lambda$

9- لنكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = \frac{-x^2 - e|x|}{-|x| - 1} - \ln(e^{|x|} + 1) + \ln 2$

10- جد العلاقة بين الدالة h والدالة f .

11- انشاء المنحنى (C_h) انطلاقا من منحنى الدالة f .

ننوقش عن المحاولة ننوقش عن الابداع

التمرين الثاني : 7

- تكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 1$; $u_1 = 2$ و $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$
- 1- نعتبر (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بمايلي: $v_n = \alpha u_n + \beta u_{n-1}$ حيث $\beta; \alpha$ عدنان حقيقيان غير معدومين.
- أ- احسب $u_2; u_3$.
- ب- احسب $v_1; v_2; v_3$ بدلالة α و β .
- ج- بين أنه إذا كانت v_1, v_2, v_3 ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية فإن: $0 = -\beta^2 - 2\alpha\beta + 3\alpha^2$
- 2- نضع $\beta = \alpha$
- أ- برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .
- ب- اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد n من $\mathbb{N}^*$: $u_n + u_{n-1} = 3^n$
- ج- احسب $P_n = v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$
- 3- نضع $\beta = -3\alpha$
- أ- برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .
- ب- اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد n من $\mathbb{N}^*$: $u_n + u_{n-1} = (-1)^n$
- 4- بين أن (v_n) متتالية هندسية معناه $\beta = \alpha$ أو $\beta = -3\alpha$

انتهى بالتوفيق للجميع

مع تحيات

الأستاذ: قشار صالح

نوقف عن المحاولة نوقف عن الابداع



الحل النموذجي للاختبار الأول في مادة الرياضيات

ثانوية سيدي اعجاز الثالثة تقني رياضي ورياضيات

التمرين الأول:

لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$:

$$g(x) = (x^2 - 2x + e)e^x + e - 1$$

1- دراسة تغيرات الدالة g .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2x + e)e^x + e - 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = x^2 e^x - 2x e^x + e e^x + e - 1 = e - 1$$

حساب المشتقة:

$$g'(x) = (2x - 2)e^x + e^x (x^2 - 2x + e) = e^x (x^2 - 2 + e)$$

لدينا $x^2 - 2 + e > 0$ ومنه $g'(x) > 0$ ومنه الدالة g متزايدة تماما.

تبيان انه من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x) > e - 1$

بما أن الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = e - 1$

فإن $g(x) > e - 1$

استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

بما أن $e - 1 > 0$ فإن $g(x) > 0$

الجزء الثاني:

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

$$f(x) = \frac{-x^2 + ex}{x - 1} - \ln(e^{-x} + 1)$$

1- حساب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ثم بين أن: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = e - 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 + ex}{x - 1} - \ln(e^{-x} + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty \text{ ومنه } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1} -x^2 + ex = -1 + e \\ \lim_{x \rightarrow -1} x - 1 = 0^- \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty \text{ ومنه } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1} -x^2 + ex = -1 + e \\ \lim_{x \rightarrow 1} x - 1 = 0^+ \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 + ex}{x - 1} - \ln(e^{-x} (1 + e^x))$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 + ex}{x - 1} + x - \ln(1 + e^x)$$

$$= \frac{-x^2 + ex + x^2 - x}{x - 1} - \ln(1 + e^x)$$

$$= \frac{x(e - 1)}{x \left(1 - \frac{1}{x}\right)} - \ln(1 + e^x) = e - 1$$

2- استنتاج المستقيمات المقاربة لمنحنى الدالة f .

للمنحنى مستقيمات مقاربة التالية: $x = 1$; $y = e - 1$

$$f'(x) = \frac{-g(x)}{(x - 1)^2 (e^x + 1)} : \mathbb{R} - \{1\}$$

$$f'(x) = \frac{(-2x + e)(x - 1) - (-x^2 + ex)}{(x - 1)^2} + \frac{e^{-x}}{e^x + 1}$$

$$= \frac{-2x^2 + 2x + ex - e + x^2 - ex}{(x - 1)^2} + \frac{1}{e^x + 1}$$

$$= \frac{(-x^2 + 2x - e)(e^x + 1) + x^2 - 2x + 1}{(x - 1)^2 (e^x + 1)}$$

$$= \frac{(-x^2 + 2x - e)e^x - e + 1}{(x - 1)^2 (e^x + 1)} = \frac{-g(x)}{(x - 1)^2 (e^x + 1)}$$

3- استنتاج اتجاه التغير الدالة f , ثم تشكيل جدول تغيراتها.

لدينا $(x - 1)^2 (e^x + 1) > 0$ و $-g(x) < 0$ ومنه $f'(x) < 0$ ومنه

الدالة f متناقصة تماما.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	-
$f(x)$	$e - 1$	$+\infty$	$-\infty$

4- تبيان أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x + e - 1$ مقارب

مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (-x + e - 1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 + ex}{x - 1} - \ln(e^{-x} + 1) + x - e - 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e - 1}{x - 1} - \ln(e^{-x} + 1) = 0$$

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x + e - 1$ مقارب

مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ومنه $f(x) = \ln(\lambda)$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) و

المستقيم $y = \ln \lambda$

$\ln \lambda \in]-\infty; e-1[$ يكافئ $\lambda \in]0, e^{e-1}[$ للمعادلة حلين.

$\ln \lambda \in [e-1; +\infty[$ يكافئ $\lambda \in [e^{e-1}; +\infty[$ للمعادلة حل وحيد

لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$h(x) = \frac{-x^2 - e^{|x|}}{-|x| - 1} - \ln(e^{|x|} + 1) + \ln 2$$

10- إيجاد العلاقة بين الدالة h والدالة f : $h(x) = f(-|x|) + \ln 2$

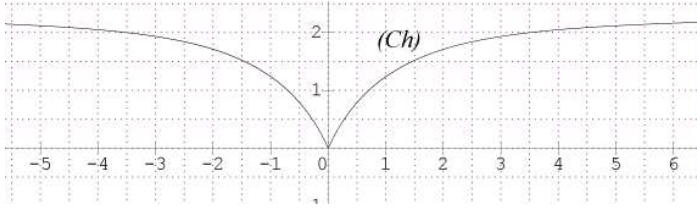
لدينا $x \mapsto f(-|x|)$ منحنيها هو نظير الجزء من المنحنى (C_f)

الواقع في المجال $] -\infty; 0]$

ومنه (C_h) هو صورة لمنحنى الدالة $f(-|x|)$ بانسحاب $x \mapsto f(-|x|)$

الذي شعاعه $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ \ln 2 \end{pmatrix}$

11- إنشاء المنحنى (C_h) انطلاقا من منحنى الدالة f .



انتهى بالتوفيق للجميع

الأستاذ: قشار صلي

نوقف عن المحاولة نوقف عن الإبداع



5- تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و λ حيث:

$$-0,5 < \alpha < -0,3 \text{ و } 2,6 < \lambda < 2,7$$

الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على $[-0,5; -0,3]$ و

$$f(-0,5) = 0,1 \text{ و } f(-0,3) = -0,1 \text{ بما أن } f(-0,3) < 0 < f(-0,5)$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $f(x) = 0$

تقبل حلا α حيث $-0,5 < \alpha < -0,3$

الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[2,6; 2,7]$

$$f(2,6) = 0,12 \text{ و } f(2,7) = -0,02$$

بما أن $f(2,6) > 0 > f(2,7)$

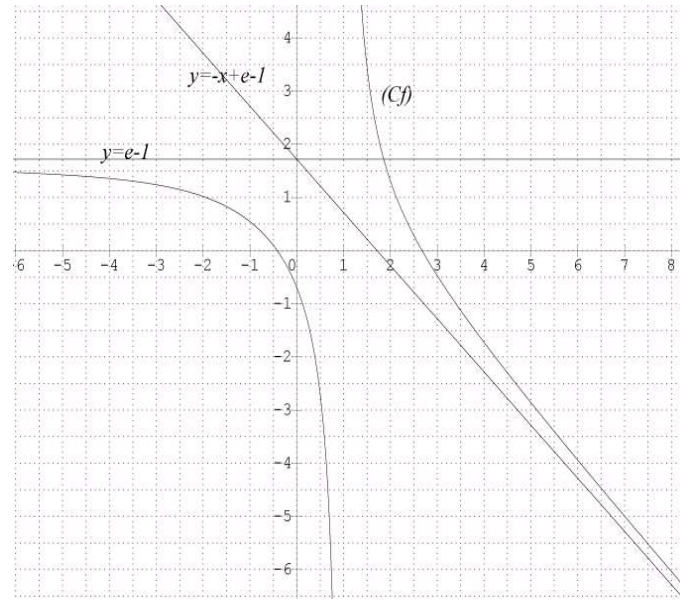
ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $f(x) = 0$

تقبل حلا λ حيث $2,6 < \lambda < 2,7$

$$6- \lim_{x \rightarrow \lambda} \frac{f(x) - f(\lambda)}{x - \lambda} = f'(\lambda) \text{ التفسير النتيجة هندسيا}$$

العدد $f'(\lambda)$ معامل توجيه المماس عند الفاصلة λ .

7- إنشاء كلا من المستقيمتين المقاربتين والمنحنى



9- المناقشة بيانيا حسب قيم العدد الحقيقي الموجب تماما λ عدد حلول

$$\text{المعادلة: } \frac{-x^2 + ex}{e^x - 1} = \frac{\lambda}{e^x} + \lambda$$

$$\text{ومنه } \frac{-x^2 + ex}{x - 1} = \ln\left(\frac{\lambda}{e^x} + \lambda\right)$$

$$\text{ومنه } \frac{-x^2 + ex}{x - 1} = \ln\left(\lambda\left(\frac{1}{e^x} + 1\right)\right)$$

$$\text{ومنه } \frac{-x^2 + ex}{x - 1} = \ln \lambda + \ln\left(\frac{1}{e^x} + 1\right)$$

$$\frac{-x^2 + ex}{x - 1} - \ln(e^{-x} + 1) = \ln \lambda$$

1. $v_n = \alpha u_n + \beta u_{n-1}$

أ. حساب الحدود : $u_2 = 7$; $u_3 = 20$.

ب. حساب الحدود : v_1, v_2, v_3 ، $v_1 = 2\alpha + \beta$ ، $v_2 = 7\alpha + 2\beta$ ، $v_3 = 20\alpha + 7\beta$.

ج. v_1, v_2, v_3 حدود متتابعة من متتالية هندسية معناه $v_2^2 = v_1 \times v_3$ معناه $(7\alpha + 2\beta)^2 = (2\alpha + \beta)(20\alpha + 7\beta)$
معناه $9\alpha^2 - 6\alpha\beta - 3\beta^2 = 0$ معناه $3\alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2 = 0$

2. نضع $\beta = \alpha$:

أ. لدينا $v_n = \alpha u_n + \alpha u_{n-1}$ معناه $v_n = \alpha(u_n + u_{n-1}) \dots \dots (1)$ من أجل كل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}^*$:

$v_{n+1} = \alpha(u_{n+1} + u_n)$

$= \alpha(2u_n + 3u_{n-1} + u_n)$

$= \alpha(3u_n + 3u_{n-1})$ و منه

$v_{n+1} = 3v_n$

$v_1 = 3\alpha$ و $q = 3$ متتالية هندسية أساسها

ت. لدينا : $v_n = v_1 \times 3^{n-1}$ و منه $v_n = 3\alpha \times 3^{n-1}$ معناه : $v_n = \alpha \times 3^n \dots \dots (2)$ من (1) و (2) نستنتج أن:

$u_n + u_{n-1} = 3^n$ معناه $\alpha(u_n + u_{n-1}) = \alpha \times 3^n$

حساب المجموع: $P_n = v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$ لدينا $v_n = \alpha \times 3^n$ ومنه

$P_n = \alpha \times 3^1 \times \alpha \times 3^2 \times \dots \times \alpha \times 3^n$

$= \alpha^n \times 3^{1+2+\dots+n}$

$P_n = \alpha^n 3^{\frac{n(n+1)}{2}}$

3. نضع $\beta = -3\alpha$:

أ. إثبات أن (v_n) متتالية هندسية .

لدينا $v_n = \alpha u_n - 3\alpha u_{n-1} \dots \dots (1)$

من أجل كل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}^*$:

$v_{n+1} = \alpha(u_{n+1} - 3u_n)$

$= \alpha(2u_n + 3u_{n-1} - 3u_n)$

$= \alpha(-u_n + 3u_{n-1})$ و منه

$= -\alpha(u_n - 3u_{n-1})$

$v_{n+1} = -v_n$

$v_1 = -\alpha$ و $q = -1$ متتالية هندسية أساسها

ب. لدينا $v_n = -\alpha(-1)^{n-1}$ و منه $v_n = \alpha(-1)^n \dots \dots (2)$ من (1) و (2) نستنتج أن:

$\alpha(u_n - 3u_{n-1}) = \alpha(-1)^n$ و منه

$u_n - 3u_{n-1} = (-1)^n$

4. (v_n) متتالية هندسية معناه $3\alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2 = 0$

$\Delta = 16\beta^2$ معناه $\alpha = \beta$ و $\alpha = -3\beta$