المادّة: الرياضيات
المستوى: 3 ت إ

التّاريخ: 2021/11/29
المدّة: 02 سـا و30د

# اختبار الفصل الأوّل

## تمرين 1:

$(u_n)$ متتالية عددية معرّفة بحدّها الأوّل $u_0 = \alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$: $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$

**I.** عيّن قيمة العدد الحقيقي $\alpha$ حتى تكون المتتالية $(u_n)$ ثابتّة.

**II.** في كل ما يلي: $\alpha = 3$

**1)** أحسب الحدود $u_1$ , $u_2$ , $u_3$ .

**2)** أ- برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد $n$ من $\mathbb{N}$ فإنّ: $u_n > 1$

**ب-** جدّ اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ .ماذا تستنتج؟

**3)** لتكن $(v_n)$ متتالية معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n - 1$

أ) بيّن أنّ $(v_n)$ متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول $v_0$ و أساسها $q$.

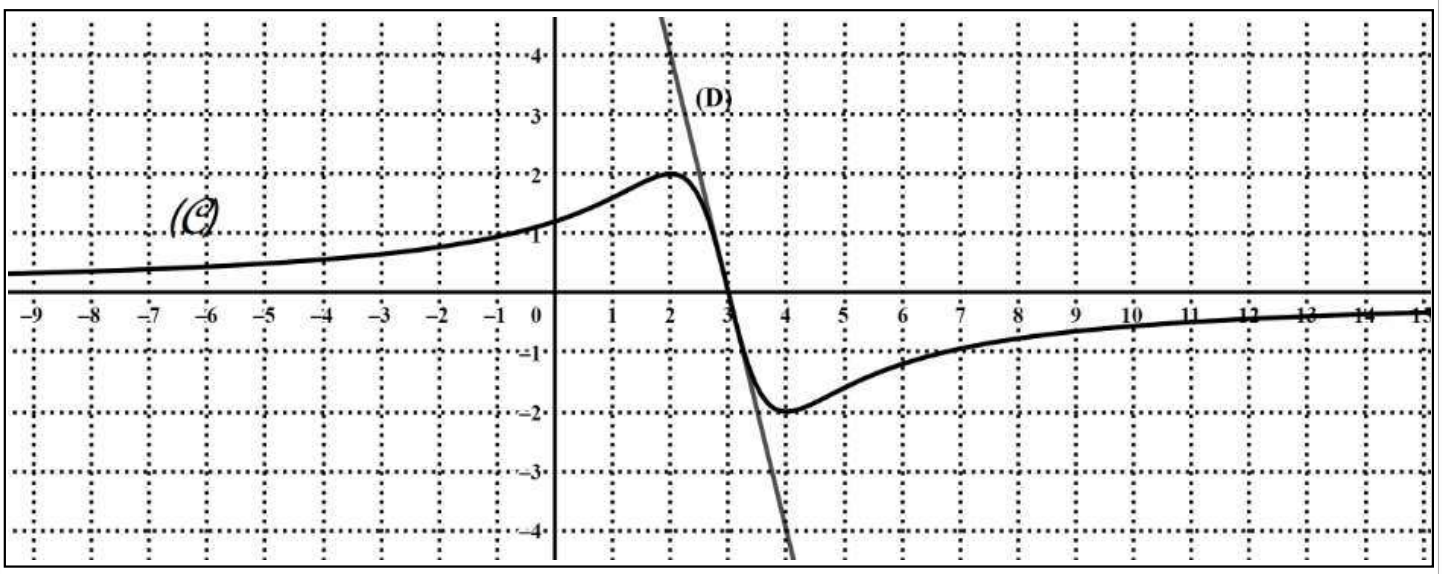
**ب)** أكتب عبارة $v_n$ بدلالة $n$ ثم استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_n = 2\left(\frac{1}{5}\right)^n + 1$.

**ج)** ماهي نهاية المتتالية $(u_n)$؟

**4)** أحسب بدلالة $n$ المجموعين $S_n$ و $S'_n$ حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ و $S'_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

## تمرين 2:

في الشكل المرفق التمثيل البياني $(\mathcal{C})$ للدّالة $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}$، $(\Delta)$ مماس لـ $(\mathcal{C})$ عند النّقطة $A(3;0)$




**1)** عيّن: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{f(x)}$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)}$

**2)** عيّن معادلة المستقيم المقارب الأفقي.

**3)** أدرس وضعية $(\mathcal{C})$ بالنسبة لمحور الفواصل ثم استنتج اشارة $f$.

**4)** عيّن $f'(2)$ وشكل جدول تغيرات الدّالة $f$.

**5)** عيّن $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$ ثم أكتب معادلة $(\Delta)$.

**6)** ناقش بيانيًا حسب قيم الوسيط $m$ عدد حلول المعادلة: $f(x)=m$

## تمرين 3:

نعتبر الدّالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ كما يلي: $f(x)=\frac{x^2+5x+10}{x+2}$

ليكن $(C)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

**1)** أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

**ب-** أحسب $\lim\limits_{x\to -2^{>}}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to -2^{<}}f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيًا.

**2)** أ- عيّن الأعداد الحقيقة $a$ ، $b$ ، $c$ حيث من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}-\{-2\}$ : $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+2}$

**ب-** بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة: $y=x+3$ مستقيم مقارب مائل للمنحني $(C)$.

**جـ-** أدرس وضعية المنحني $(C)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$.

**3)** أ- بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}-\{-2\}$ فإنّ: $f'(x)=\frac{x^2+4x}{(x+2)^2}$

ب- أدرس اتجاه تغير الدّالة $f$ على مجالي مجموعة تعريفها ،ثم شكّل جدول تغيراتها.

**4)** أكتب معادلة المماس $(T)$لمنحني $(C)$ عند النّقطة ذات الفاصلة 2.

**5)** بيّن أنّ النقطة $\Omega(-2;1)$ هي مركز تناظر للمنحني $(C)$.

**6)** أنشئ المستقيم $(\Delta)$ و المنحني $(C)$.

**7)** نعتبر الدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=\frac{x^2+5|x|+10}{|x|+2}$ و $(C_g)$ تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

أ- بيّن أنّ g دالة زوجية.

**ب-**اشرح كيفية انشاء المنحني $(C_g)$ اعتمادا على المنحني $(C)$ ثم أنشئه.

**بالتّوفيق** **الأستاذ: بوشاشية وليد**

## تصحيح امتحان الفصل I

### التمرين 1:

1) قيمة $\alpha$:

$\frac{1}{5}\alpha + \frac{4}{5} = \alpha$

$\alpha + 4 = 5\alpha$

$4\alpha = 4$ ومنه $\alpha = 1$

2) حساب الحدود:

$u_1 = \frac{1}{2}(3) + \frac{4}{5} = \frac{3}{2} + \frac{4}{5} = \frac{15+8}{10} = \frac{23}{10}$

$u_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{23}{10}\right) + \frac{4}{5} = \frac{23}{20} + \frac{16}{20} = \frac{39}{20}$

3) البرهان بالتراجع: $u_n > 1$

- التحقق من صحة $P(0)$

محققة: $u_0 > 1 \rightarrow 3 > 1$

- نفرض صحة $P(n)$ ونبرهن صحة $P(n+1)$

لدينا $u_n > 1$

$\frac{1}{5}u_n > \frac{1}{5}$

$\frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} > 1$

ومنه $u_{n+1} > 1$

اذن $P(n)$ محققة من أجل كل $n$ طبيعي

- اتجاه تغير $(u_n)$:

$u_{n+1} - u_n = \frac{\alpha+4}{5} - \frac{5u_n}{5}$

$= \frac{-4u_n + 4}{5}$

لدينا $u_n > 1$

$-4u_n < -4$

$-4u_n + 4 < 0$

وبالتالي $(u_n)$ متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

لدينا $(u_n)$ متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل اذن هي متقاربة

### التمرين 3:

1) $v_n = u_n - 1$

لدينا:

$v_{n+1} = u_{n+1} - 1$

$= \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} - \frac{5}{5}$

$= \frac{1}{5}u_n - \frac{1}{5}$

$= \frac{1}{5}(u_n - 1)$

$v_{n+1} = \frac{1}{5}v_n$

ومنه $(v_n)$ هندسية

$v_0 = u_0 - 1 = 2$

عبارة الحد العام:

$v_n = v_p \cdot q^{n-p}$

$v_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n$

الاستنتاج عبارة $u_n$:

$u_n = v_n + 1$

$u_n = 2\left(\frac{1}{5}\right)^n + 1$

حساب $\lim (u_n)$:

$\lim_{n\to+\infty} 2\left(\frac{1}{5}\right)^n + 1 = 1$

لأن: $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$

المجموع:

$S_n = v_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$

$= 2\left(\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{\frac{4}{5}}\right)$

$= \frac{5}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right)$

$S'_n = S_n + n + 1$

$= \frac{5}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right) + n + 1$

### التمرين 2:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^+$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^-$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ مقارب أفقي لـ $(C_f)$ بجوار $\pm\infty$.

دراسة وضعية $(C_f)$ بالنسبة لمحور الفواصل

$x \in ]-\infty, 3[$ فوق محور الفواصل $(C_f)$

$(C_f)$ يقطع محور الفواصل $x = 3$

$x \in ]3, +\infty[$ تحت محور الفواصل $(C_f)$

| $x$ | $-\infty$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $+$ | $0$ | $-$ | |

$f'(2) = 0$

جدول التغيرات:

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $+$ |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $e$ | $\searrow$ | $0$ |
| | | | $-2$ | | |

$\lim_{x\to3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = f'(3) = -2$

معادلة $(D)$:

$y = f'(3)(x - 3) + f(3)$

$y = -2x + 6$

المناقشة البيانية:

$m < -2$ لا توجد حلول.

$m = -2$ حل وحيد مضاعف

$-2 < m < 0$ حلان

$m = 0$ حل وحيد.

$0 < m < 2$ حلان

$m = 2$ حل وحيد مضاعف

$m > 2$ لا توجد حلول.

تمرين 3:

$$f(x)=\frac{x^2+5x+10}{x+2}$$

1) النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

| x | $-\infty$ | | $-2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | − | 0 | + | |

$$\lim_{x\to-2^-}f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-2^+}f(x)=+\infty$$

م.م. عمودي: $x=-2$

2) الأعداد a، b، c:

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+2}$$

$$f(x)=\frac{ax^2+2ax+bx+2b+c}{x+2}$$

بالمطابقة:

$a=1$

$2a+b=5$

$2+b=5$

$b=3$

$2b+c=10$

$c=4$

3) المستقيم المقارب المائل:

$$\lim_{|x|\to+\infty}f(x)-y$$

$$\lim_{|x|\to+\infty}x+3+\frac{4}{x+2}-(x+3)$$

$$\lim_{|x|\to+\infty}\frac{4}{x+2}=0$$

4) الوضعية:

$f(x)-y$

$(C_f)$ تحت $(\Delta)$ على $]-\infty,-2[$

$(C_f)$ فوق $(\Delta)$ على $]-2,+\infty[$

تمرين 4: $f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ بـ:

$$f'(x)=\frac{(2x+5)(x+2)-1(x^2+5x+10)}{(x+2)^2}$$

$$=\frac{2x^2+4x+5x+10-x^2-5x-10}{(x+2)^2}=\frac{x^2+4x}{(x+2)^2}$$

لدينا: $(x+2)^2>0$ إذن إشارة $f'$ من إشارة البسط

$$x^2+4x=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ أو } x=-4$$

| x | $-\infty$ | | $-4$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | + | 0 | − | 0 | + | |

$f$ متزايدة تماما على $]-\infty,-4]$ ؛ $f$ متناقصة تماما على $[-2,0]$

$f$ متناقصة تماما على $]-4,-2[$ ؛ $f$ متزايدة تماما على $[0,+\infty[$

| x | $-\infty$ | | $-4$ | | $-2$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $-3$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $5$ | ↗ | $+\infty$ |

معادلة المماس:

$$y=f'(2)(x-2)+f(2)$$

$$y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}+\frac{12}{2}$$

$$\boxed{y=\frac{3}{4}x+\frac{9}{2}}$$

مركز تناظر: $\Omega(-2,1)$

$-4-x\in\mathbb{R}-\{-2\}$

$$f(-4-x)+f(x)=2$$

$$=-4-x+3+\frac{4}{-4-x+2}+x+3+\frac{4}{x+2}$$

$$=2+\frac{4}{-x-2}+\frac{4}{x+2}=2$$

7) $g$ زوجية:

$D_g=\mathbb{R}$ متناظرة بالنسبة لـ $0$.

$$g(-x)=\frac{(-x)^2+5|-x|+10}{|-x|+2}=\frac{x^2+5|x|+10}{x+2}=g(x)$$

شرح كيفية انشاء $(C_g)$:

$(C_g)$ منطبقة على $(C_f)$

نتناظر الجزء الموجب بالنسبة لمحور التراتيب

لأن $g$ زوجية.

$$g(x)=\begin{cases}f(x) & x\geq 0\\ f(-x) & x\leq 0\end{cases}$$