إختبار شهادة البكالوريا التجريبي لمادة الرياضيات

السنة الثالثة ثانوي علوم تجريبية **يوم: الاثنين 12 ماي 2025** **المدة: 03 ساعات ونصف**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (4.5ن)

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة مع التبرير:

1) Z عدد مركب حيث $Z = (1-i)e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، الشكل الأسي للعدد المركب Z هو :

(أ) $Z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$ (ب) $Z = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$ (ج) $Z = \sqrt{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}$

2) n عدد طبيعي، العدد $\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}i\right)^n$ يكون حقيقيا موجبا تماما إذا وفقط إذا كان :

(أ) $n = 8k+1$ (ب) $n = 8k$ (ج) $n = 4k$ (حيث $k \in \mathbb{N}$)

3) مجموعة حلول المعادلة $Z^2 = i$ في $\mathbb{C}$ هي :

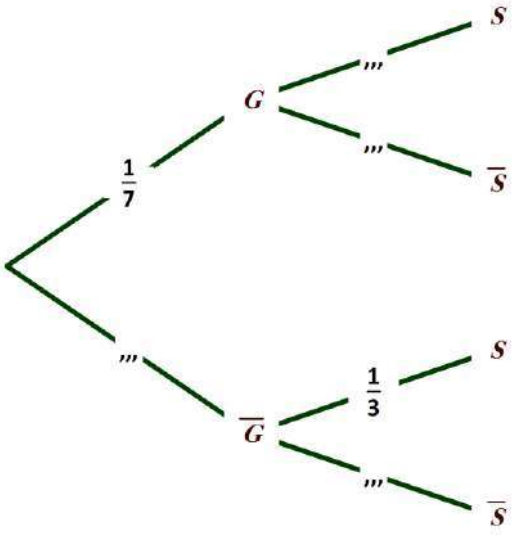
(أ) $S = \left\{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}\ ; 1\right\}$ (ب) $S = \left\{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}\ ; \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}\right\}$ (ج) $S = \left\{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}\ ; \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}\right\}$

4) n عدد طبيعي وx عدد حقيقي، إذا كان معامل x^2 في منشور $(1+x)^n$ هو36 فإن:

(أ) $n = 2$ (ب) $n = 8$ (ج) $n = 9$

التمرين الثاني: (4ن)

لعبة تعتمد على رمي كرة داخل دلو من على بعد مسافة معينة يقوم بها مجموعة من اللاعبين بحيث $\frac{6}{7}$ منهم يلعبون باليد اليمنى، و$\frac{1}{7}$ يلعبون باليد اليسرى. احتمال وضع الكرة داخل الدلو بالنسبة للاعب باليد اليمنى هو $\frac{1}{3}$ وبالنسبة للاعب باليد اليسرى هو $\frac{1}{2}$



1) نختار عشوائيا لاعبا واحدا ، وليكن الحدثان :

G : " اللاعب يلعب باليد اليسرى " ، S : " اللاعب يضع الكرة داخل الدلو"

أ) أكمل شجرة الاحتمالات الموافقة لهذه اللعبة.

ب) احسب الاحتمالات التالية: $P(G \cap S)$ و $P(S)$

جـ) إذا علمت أن اللاعب وضع الكرة داخل الدلو، احسب احتمال أن يكون اللاعب يلعب باليد اليمنى.

2) ليكن "محمد" لاعب يلعب باليد اليمنى من بين هؤلاء اللاعبين بحيث يرمي كرتين واحدة تلو الأخرى (نفرض أن الرميتين مستقلتين)

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رميتين عدد الكرات الموجودة داخل الدلو.

أ) برر أن قيم المتغير العشوائي X هي : 0 ، 1 ، 2 . ثم بين أن : $P(X=1) = \frac{4}{9}$

ب) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم احسب أمله الرياضياتي $E(X)$

3) يرمي الآن اللاعب "محمد" n كرة الواحدة تلو الأخرى.

- أوجد بدلالة n احتمال وضعه الكرة داخل الدلو مرة على الأقل.

التمرين الثالث: (4.5ن)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{2}{2\sqrt{2}-u_n}$

1) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n < \sqrt{2}$

ب) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما، ثم استنتج أنها متقاربة.

2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \frac{u_n}{\sqrt{2}-u_n}$

أ) بين أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها 1، ثم احسب حدها الأول.

ب)اكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = \frac{n\sqrt{2}}{n+1}$

جـ) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $w_n = ln(u_n)$ و $S_n = w_1 + w_2 + \cdots + w_n$

أ) بين أن : $S_n = \frac{1}{2}nln(2) - ln\,(n+1)$

ب) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$

التمرين الرابع: (7ن)

I) لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = (8-4x)e^x + 16$

1) احسب نهاية الدالة g عند $-\infty$ و$+\infty$

2) ادرس اتجاه تغير الدالة g، ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أ) أثبت أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$، ثم تحقق أن $2.37 < \alpha < 2.38$

ب) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$

II) لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{e^x+4x}{e^x+4}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، ثم بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ وفسر النتيجة بيانيا.

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x+4)^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$

ب)ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ)

4) أ)ارسم (Δ) و (C_f) (نأخذ $f(\alpha) \simeq 1.4$)

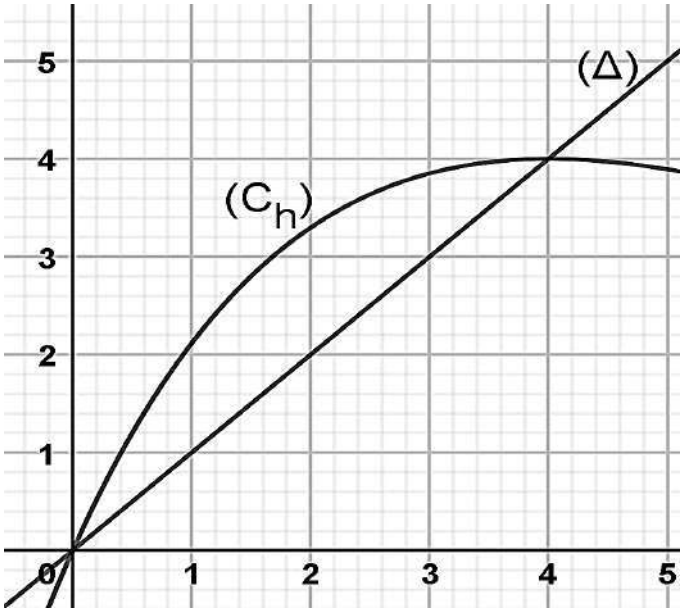
ب)عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي الموجب تماما m حتى تقبل المعادلة $f(x) = ln\,(m)$ حلين متمايزين.

5) أ) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1;+\infty[$: $\frac{e^x}{e^x+4} \leq f(x) \leq x$

ب) لتكن $\mathcal{A}$ مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها : $y = 0$ ، $x = 1$ و $x = 2$ – بين أن $ln\,(\frac{e^2+4}{e+4}) \leq \mathcal{A} \leq \frac{3}{2}$

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (4.5ن)



نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n e^{1-\frac{1}{4}u_n}$

في الشكل المقابل (C_h) هو التمثيل البياني للدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = xe^{1-\frac{1}{4}x}$

(Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$

1) أ) أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة، ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) دون حسابها موضحا خطوط الإنشاء.

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2) ادرس اتجاه تغير الدالة h على المجال $[0;4]$.

3) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0 < u_n < 4$

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

4) بين أن المتتالية (u_n) متقاربة، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

5) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$

أ) بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $u_n = e^{n-\frac{1}{4}S_n}$

ب) استنتج أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = 4$

التمرين الثاني: (4.5ن)

يحتوي الصندوق U_1 على أربع بطاقات متماثلة تحمل الحروف التالية : A, B, C, E ، ويحتوي الصندوق U_2 على ثلاث كريات سوداء كل منها تحمل الرقم 2، وخمس كريات حمراء تحمل الأرقام 3 ;3 ;2 ;1 و0. كل الكريات متماثلة ولا نفرق بينها عند اللمس.

نسحب بطاقة واحدة من الصندوق U_1 ، إذا ظهرت إحدى حروف كلمة BAC نسحب عشوائيا من الصندوق U_2 ثلاث كريات في آن واحد. وإلا فنسحب عشوائيا من U_2 كريتين على التوالي دون إرجاع.

نعتبر الأحداث التالية A – " الكريات المسحوبة لها نفس الرقم" B – " الكريات المسحوبة لها نفس اللون"

C – " جداء أرقام الكريات المسحوبة معدوم"

1) أ) بين أن: $P(A) = \frac{13}{112}$ ، ثم احسب احتمال كلا من الحدثين B و C

ب) بين أن: $P(A \cap B) = \frac{11}{224}$ ، ثم استنتج $P(A \cup B)$ و $P_A(B)$

ج) هل الحدثان A و B مستقلان؟ علل.

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات السوداء المتبقية في الصندوق U_2.

أ) بين أن $P(X = 2) = \frac{15}{28}$ ، ثم عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

ب) احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$، ثم استنتج $E(2025X + 1446)$.

التمرين الثالث: (4.5ن)

I) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود: $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 128$

1) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث: $P(z) = (z-8)(z^2 + az + b)$

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z التالية $P(z) = 0$

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$، نعتبر النقط A , B و C لواحقها على الترتيب هي: $z_A = 2 - 2\sqrt{3}i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = 8$

1) أ) اكتب على الشكل الأسي كلا من z_A و z_B

ب) بين أن $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{2025} - \left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{1446} = 0$

2) ليكن L العدد المركب المعرف كما يلي: $L = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$

– احسب الطويلة وعمدة للعدد المركب L، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

3) عين مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z (M تختلف عن A و B) بحيث : $\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right) = 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

التمرين الرابع: (6.5ن)

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{2x-1}{x^2} + \ln x$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

2) أ) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0 ; +\infty[$: $f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

ج) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β حيث $0.5 < \beta < 0.6$

3) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

4) نعتبر الدالة h المعرفة على $]1; +\infty[$ كما يلي: $h(x) = ln(x-1)$ ، (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1; +\infty[$: $f(x) > h(x)$

ب) احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - h(x)]$ ، وماذا تستنتج؟

ج) بين أن (C_h) هو صورة التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln x$ بانسحاب يطلب تعيين شعاعه

5) أنشئ كلا من (T) ، (C_h) و (C_f)

6) α عدد حقيقي .

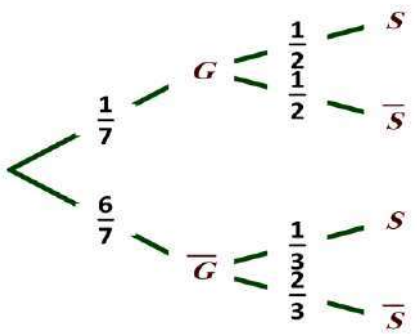
أ) بين أن الدالة $x \mapsto (x-\alpha)ln(x-\alpha) - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto ln(x-\alpha)$ على $]\alpha; +\infty[$

ب) استنتج دالة أصلية للدالة $x \mapsto ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ على $]1; +\infty[$

ج) احسب $\mathcal{A}$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_h) والمستقيمين اللذين معادلتاهما: $x = 3$ و $x = 2$

الإجابة المقترحة للاختبار التجريبي في مادة الرياضيات (الموضوع الأول)

عناصر الإجابة	سلم التنقيط	
التـــمرين الأول:	4.5نقاط	
1. الإجابة الصحيحة هي (أ)	0.25	1.25
التبرير: الشكل الأسي للعدد المركب $Z=(1-i)e^{i\frac{\pi}{3}}$ لدينا : $\lvert 1-i\rvert=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$		
و $1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow \arg(1-i)=\frac{-\pi}{4}+2k\pi \Leftrightarrow \begin{cases} cos(\arg(1-i))=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin(\arg(1-i))=\frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$	01	
ومنه $(1-i)e^{i\frac{\pi}{3}}=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\times e^{i\frac{\pi}{3}}=\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$		
2. الإجابة الصحيحة هي (ب)	0.25	1.25
التبرير: لدينا : $\lvert\sqrt{3}+\sqrt{3}i\rvert=\sqrt{\sqrt{3}^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{6}$		
و $\arg(\sqrt{3}+\sqrt{3}i)=\frac{\pi}{4}+2k'\pi \Leftrightarrow \begin{cases} cos(\arg(\sqrt{3}+\sqrt{3}i))=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin(\arg(\sqrt{3}+\sqrt{3}i))=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ حيث $k'\in\mathbb{Z}$	01	
$(\sqrt{3}+\sqrt{3}i)^n$ يكون **حقيقيا موجبا تماما** إذا وفقط إذا كان $\arg\left((\sqrt{3}+\sqrt{3}i)^n\right)=2k\pi$ و $k\in\mathbb{N}$		
يكافئ $n\times\arg(\sqrt{3}+\sqrt{3}i)=2k\pi$ يكافئ $n\times\frac{\pi}{4}=2k\pi$ يكافئ $n=8k$ و $k\in\mathbb{N}$		
3. الإجابة الصحيحة هي (ب)	0.25	01
التبرير: حلول المعادلة $Z^2=i$ في $\mathbb{C}$: بوضع : $Z=x+iy$ نجد $Z^2=i$ تكافئ $x^2-y^2+2xyi=i$		
بالمطابقة نجد: $x^2-y^2=0$ و $2xy=1$ تكافئ $(x+y)(x-y)=0$ و $xy=\frac{1}{2}$	0.75	
تكافئ ($x=y$ أو $x=-y$) و $xy=\frac{1}{2}$ تكافئ $x^2=\frac{1}{2}$ أو $x^2=-\frac{1}{2}$ تكافئ $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ أو $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$		
ومنه : $Z=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ أو $Z=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$		
4. الإجابة الصحيحة هي (ج)	0.25	01
التبرير: إيجاد قيمة n حيث معامل x^2 في منشور $(1+x)^n$ هو 36:	0.75	
لدينا $(1+x)^n=\sum_{p=0}^{n}c_n^p.1^{n-p}.x^p$ وبالتالي من أجل $p=2$ نجد أن معامل x^2 في المنشور هو c_n^2		
لدينا $c_n^2=36$ تكافئ $\frac{n!}{2!(n-2)!}=36$ تكافئ $\frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!}=36$ تكافئ $\frac{n(n-1)}{2}=36$ تكافئ $n(n-1)=72$		
و n عدد طبيعي غير معدوم فهذا يكافئ $n=9$ $(9\times 8=72)$		
التـــمرين الثاني:	4نقاط	
1) أ) إكمال شجرة الاحتمالات :	0.5	02



ب) حساب الاحتمالات: $P(G \cap S) = P(G) \times P_G(S) = \frac{1}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{14}$ — 0.5

$P(S) = P(G \cap S) + P(\bar{G} \cap S) = \frac{1}{14} + \frac{6}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{14}$ — 0.5

جـ) حساب احتمال أن يكون اللاعب يلعب باليد اليمنى علما أنه وضع الكرة داخل الدلو أي نحسب $P_S(\bar{G})$:

$P_S(\bar{G}) = \frac{P(\bar{G} \cap S)}{P(S)} = \frac{\frac{6}{7} \times \frac{1}{3}}{\frac{5}{14}} = \frac{\frac{6}{21}}{\frac{5}{14}} = \frac{4}{5}$ — 0.5

2) أ) تبرير أن قيم المتغير العشوائي X هي : 0 ، 1 ، 2 — 0.5

$X = 0$ معناه عدم وجود كرة داخل الدلو بعد الرميتين

$X = 1$ معناه وجود كرة واحدة داخل الدلو بعد الرميتين

$X = 2$ معناه وجود كرتين داخل الدلو بعد الرميتين

ب) لنبين أن $P(X = 1) = \frac{4}{9}$: $P(X = 1) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$

قانون احتمال المتغير العشوائي X : $P(X = 2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ ، $P(X = 0) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ — 0.75

x_i	0	1	2	المجموع
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$: $E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i P(X = x_i) = 0 \times \frac{4}{9} + 1 \times \frac{4}{9} + 2 \times \frac{1}{9} = \frac{2}{3}$ — 0.5

1.75

3) حساب بدلالة n احتمال وضع محمد للكرة داخل الدلو مرة على الأقل: — 0.25

نرمز لاحتمال هذه الحادثة بـ P_n

ليكن احتمال حادثتها العكسية هو $\bar{P}_n$ وبالتالي : $P_n = 1 - \bar{P}_n = 1 - \overbrace{\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \ldots \times \frac{2}{3}}^{n \text{ مرة}} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$ — 0.25

0.25

التـــمرين الثالث: 4.5نقاط

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{2\sqrt{2} - u_n}$

1) أ) لنبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < \sqrt{2}$

*لدينا $u_0 = 0$ ومنه $u_0 < \sqrt{2}$ أي الخاصية محققة من أجل $n = 0$

**نفرض أن $u_n < \sqrt{2}$ محققة من أجل n عدد طبيعي كيفي ونبرهن صحتها من أجل $n + 1$ أي نثبت أن $u_{n+1} < \sqrt{2}$ ، لدينا $u_n < \sqrt{2}$ ومنه $-u_n > -\sqrt{2}$ ومنه $2\sqrt{2} - u_n > \sqrt{2}$ ومنه $\frac{1}{2\sqrt{2} - u_n} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ومنه $\frac{2}{\sqrt{2} - u_n} < \frac{2}{\sqrt{2}}$ ومنه $u_{n+1} < \frac{2\sqrt{2}}{2}$ أي $u_{n+1} < \sqrt{2}$ — 0.75

***وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < \sqrt{2}$

1.75

ب) لنبين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما:

لدينا : $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{2\sqrt{2} - u_n} - u_n = \frac{u_n^2 - 2\sqrt{2}u_n + 2}{2\sqrt{2} - u_n} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2\sqrt{2} - u_n}$ — 0.25

لدينا $u_n < \sqrt{2}$ معناه $-u_n > -\sqrt{2}$ معناه $2\sqrt{2} - u_n > \sqrt{2}$ أي $2\sqrt{2} - u_n > 0$ ولدينا $(u_n - \sqrt{2})^2 > 0$

أي $u_{n+1} - u_n > 0$ نستنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ — 0.5

استنتاج التقارب : لدينا (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ $\sqrt{2}$ فهي متقاربة نحو l حيث $l \leq \sqrt{2}$ — 0.25

2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = \frac{u_n}{\sqrt{2}-u_n}$

أ) لنبين أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها 1: — 0.5

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{\sqrt{2}-u_{n+1}} = \frac{\frac{2}{2\sqrt{2}-u_n}}{\sqrt{2}-\frac{2}{2\sqrt{2}-u_n}} = \frac{\frac{2}{2\sqrt{2}-u_n}}{\frac{4-\sqrt{2}u_n-2}{2\sqrt{2}-u_n}} = \frac{2}{2-\sqrt{2}u_n}$$

$$= \frac{2-\sqrt{2}u_n+\sqrt{2}u_n}{2-\sqrt{2}u_n} = 1+\frac{\sqrt{2}u_n}{2-\sqrt{2}u_n} = 1+\frac{2u_n}{2\sqrt{2}-2u_n} = 1+\frac{u_n}{\sqrt{2}-u_n}$$

$$= 1+v_n$$

ومنه نستنتج أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها 1 — 0.25

حساب الحد الأول: $v_0 = \frac{u_0}{\sqrt{2}-u_0} = 0$

1.75

ب) كتابة عبارة v_n بدلالة n: لدينا: $v_n = v_0 + rn$ ومنه $v_n = n$ — 0.25

استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = \frac{n\sqrt{2}}{n+1}$:

لدينا: $v_n = \frac{u_n}{\sqrt{2}-u_n}$ معناه: $\sqrt{2}v_n - v_n u_n = u_n$ معناه: $\sqrt{2}v_n = v_n u_n + u_n$

معناه: $\sqrt{2}v_n = u_n(v_n+1)$ معناه: $u_n = \frac{\sqrt{2}v_n}{v_n+1}$ معناه: $u_n = \frac{\sqrt{2}n}{n+1}$ — 0.5

ج) لنحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$: $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2}n}{n} = \sqrt{2}$ — 0.25

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $w_n = ln(u_n)$ و $S_n = w_1 + w_2 + \cdots + w_n$

أ) لنبين أن: $S_n = \frac{1}{2}nln(2) - ln(n+1)$

$$S_n = w_1 + w_2 + \cdots + w_n = ln(u_1) + ln(u_2) + \cdots + ln(u_n)$$

$$= ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + ln\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) + \cdots + ln\left(\frac{\sqrt{2}n}{n+1}\right) = ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{3\sqrt{2}}{4}\times\ldots\times\frac{\sqrt{2}n}{n+1}\right)$$

$$= ln\left(\frac{\sqrt{2}^n}{n+1}\right) = ln\left(\sqrt{2}^n\right) - ln(n+1) = nln(\sqrt{2}) - ln(n+1) = \frac{1}{2}nln(2) - ln(n+1)$$

— 0.5

01

ب) حساب $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$: $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{2}ln(2) - \frac{ln(n+1)}{n}\right] = \frac{1}{2}ln(2)$

لأن: $\lim_{n\to+\infty} \frac{ln(n+1)}{n} = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{n+1}{n}\times\frac{ln(n+1)}{n+1}\right] = \lim_{X\to+\infty}\left[\frac{X}{X-1}\times\frac{ln(X)}{X}\right] = 0$ — 0.5

التمرين الرابع — 7نقاط

I. لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = (8-4x)e^x + 16$

1) حساب النهايات: $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}(8e^x - 4xe^x + 16) = 16$ (لأن $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$) — 0.25

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ — 0.25

0.5

2) لندرس اتجاه تغير الدالة g:

حساب المشتقة: الدالة g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $g'(x) = (-4)e^x + (8-4x)e^x$ — 0.5

$$g'(x) = (-4x+4)e^x = 4e^x(-x+1)$$

01	0.25 0.25	دراسة إشارة $g'(x)$: إشارة $g'(x)$ من إشارة $-x+1$ لأن من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $4e^x > 0$ نستنتج أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty;1]$ ومتناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$ جدول التغيرات $\begin{array}{\|c\|ccc\|}\hline x & -\infty & 1 & +\infty \\ \hline g'(x) & + & 0 & - \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{\|c\|ccc\|}\hline x & -\infty & 1 & +\infty \\ \hline g'(x) & + & 0 & - \\ \hline g(x) & 16 & \nearrow\ 4e+16\ \searrow & -\infty \\ \hline \end{array}$
0.75	0.25 0.25 0.25	3) أ) إثبات أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق أن $2.37 < \alpha < 2.38$ لدينا الدالة g مستمرة على $\mathbb{R}$ ولدينا من أجل $x \leq 1$: $g(x) > 0$ ولدينا $g(1) > 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ و g متناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$ فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة وبما أن : $\begin{cases} g(2.37) \simeq +0.17 \\ g(2.38) \simeq -0.42 \end{cases}$ أي $g(2.37)\times g(2.38) < 0$ فإن $2.37 < \alpha < 2.38$ ب) استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$ مما سبق نستنتج أن : $\begin{array}{\|c\|ccc\|}\hline x & -\infty & \alpha & +\infty \\ \hline g(x) & + & 0 & - \\ \hline \end{array}$
0.75	0.25 0.25 0.25	II. لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\frac{e^x+4x}{e^x+4}$ 1) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ لنبين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x(1+\frac{4x}{e^x})}{e^x(1+\frac{4}{e^x})} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{4x}{e^x}}{1+\frac{4}{e^x}} = 1$ (لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x}=0$) التفسير البياني : (C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لحامل محور الفواصل معادلته $y=1$ عند $+\infty$
01	0.5	2) أ) لنبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=\frac{g(x)}{(e^x+4)^2}$ f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا : $f'(x)=\frac{(e^x+4)(e^x+4)-e^x(e^x+4x)}{(e^x+4)^2}=\frac{(e^x+4)^2-e^{2x}-4xe^x}{(e^x+4)^2}$ $=\frac{e^{2x}+8e^x+16-e^{2x}-4xe^x}{(e^x+4)^2}=\frac{-4xe^x+8e^x+16}{(e^x+4)^2}=\frac{(8-4x)e^x+16}{(e^x+4)^2}=\frac{g(x)}{(e^x+4)^2}$
	0.25 0.25	ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f : لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $(e^x+4)^2>0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$ و متناقصة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$ جدول التغيرات : $\begin{array}{\|c\|ccc\|}\hline x & -\infty & \alpha & +\infty \\ \hline f'(x) & + & 0 & - \\ \hline f(x) & -\infty & \nearrow\ f(\alpha)\ \searrow & 1 \\ \hline \end{array}$
01	0.25	3) أ) لنبين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{e^x+4x}{e^x+4}-x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x-xe^x}{e^x+4}=0$ لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ نستنتج أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$

ب)لندرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) :

لندرس إشارة $f(x)-x$:

$f(x)-x=\frac{e^x-xe^x}{e^x+4}=\frac{e^x(1-x)}{e^x+4}$

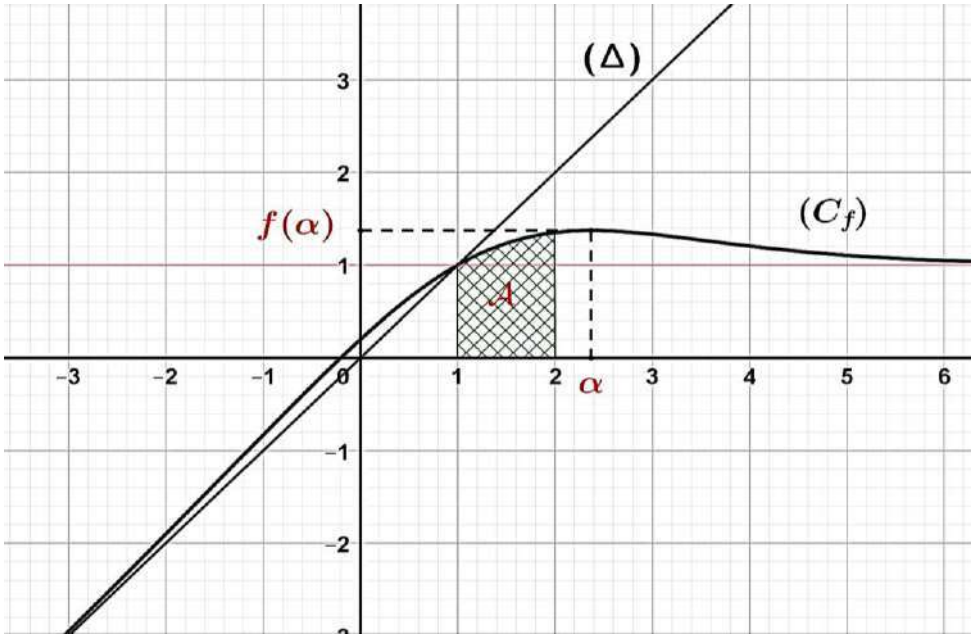
إشارة الفرق من إشارة $1-x$ لأنه من أجل كل عدد حقيقي x : $e^x>0$ و $e^x+4>0$

0.25

0.5

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)		(Δ) فوق (C_f)	(Δ) يقطع (C_f)	(Δ) تحت (C_f)	

4) أ)لنرسم (Δ) و (C_f) (نأخذ $f(\alpha)\simeq 1.4$)



0.25

0.25

01

ب)لنعين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي الموجب تماما m حتى تقبل المعادلة $f(x)=ln\,(m)$ حلين متمايزين:

حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=ln(m)$

المعادلة $f(x)=ln\,(m)$ تقبل حلين متمايزين معناه : $1<ln(m)<f(\alpha)$

معناه $e^1<e^{ln(m)}<e^{f(\alpha)}$ معناه $e^1<m<e^{f(\alpha)}$

0.25

0.25

5) أ)إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1;+\infty[$: $\frac{e^x}{e^x+4}\leq f(x)\leq x$

من أجل $x\geq 1$ لدينا: $f(x)-x\leq 0$ معناه $f(x)\leq x$ .... (1)

ولدينا : $f(x)-\frac{e^x}{e^x+4}=\frac{4x}{e^x+4}\geq 0$ أي $f(x)\geq\frac{e^x}{e^x+4}$ .... (2)

من (1) و (2) نستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1;+\infty[$: $\frac{e^x}{e^x+4}\leq f(x)\leq x$

0.5

01

ب)- لنبين أن $ln\,(\frac{e^2+4}{e+4})\leq\mathcal{A}\leq\frac{3}{2}$

لدينا من أجل $1\leq x\leq 2$ (C_f) فوق المستقيم $y=0$ ومنه : $\mathcal{A}=\int_1^2 f(x)\,dx$

لدينا $\frac{e^x}{e^x+4}\leq f(x)\leq x$ معناه $\int_1^2\frac{e^x}{e^x+4}dx\leq\int_1^2 f(x)\,dx\leq\int_1^2 x\,dx$

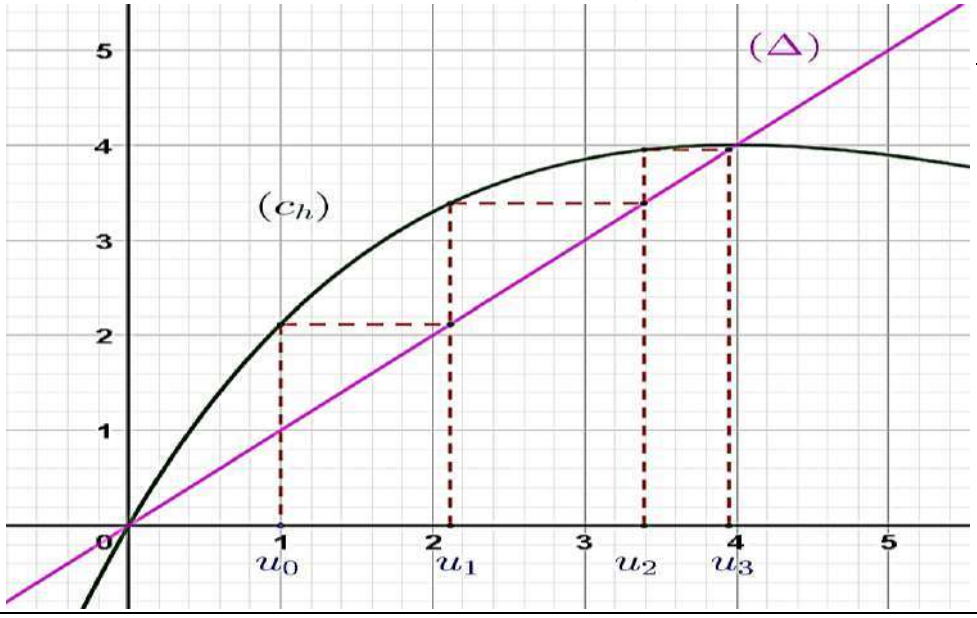
معناه : $[ln\,(e^x+4)]_1^2\leq\mathcal{A}\leq\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2$

معناه : $ln(e^2+4)-ln(e+4)\leq\mathcal{A}\leq 2-\frac{1}{2}$ معناه $ln\,(\frac{e^2+4}{e+4})\leq\mathcal{A}\leq\frac{3}{2}$

0.25

0.25

الحل النموذجي للموضوع الثاني ثالثة علوم تجريبية

عناصر الإجابة		سلم التنقيط	
التـــمرين الأول:		4.5 نقاط	
نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n e^{1-\frac{1}{4}u_n}$			
1) أ) تمثيل الحدود: 	0.5	01	
ب) وضع تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها:			
يبدو أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ لأن $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$، ومتقاربة نحو العدد 4	0.25		
(نقطة تقاطع (C_h) و (Δ))	0.25		
2) لندرس اتجاه تغير الدالة h على المجال $[0;4]$:		0.5	
h قابلة للاشتقاق على المجال $[0;4]$ ولدينا : $h'(x) = (1)\left(e^{1-\frac{1}{4}x}\right) - \frac{1}{4}x\left(e^{1-\frac{1}{4}x}\right) = (1-\frac{1}{4}x)(e^{1-\frac{1}{4}x})$	0.25		
لدينا من أجل كل x من المجال $[0;4]$: $e^{1-\frac{1}{4}x} > 0$ و $1-\frac{1}{4}x > 0$ أي $h'(x) > 0$			
نستنتج أن الدالة h متزايدة تماما على المجال $[0;4]$	0.25		
3) أ- لنبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0 < u_n < 4$:		1.25	
نسمي الخاصية $0 < u_n \leq 4$ بـ $P(n)$.			
*لدينا $u_0 = 1$ ومنه $0 < u_0 < 4$ إذن $P(0)$ محققة	0.25		
**نفرض أن $P(n)$ محققة من أجل n عدد طبيعي كيفي ونثبت صحتها من أجل $n+1$.	0.5		
لدينا $0 < u_n \leq 4$ و h متزايدة تماما على المجال $[0;4]$ و $h(0) = 0$ و $h(4) = 4$			
ومنه $h(0) < h(u_n) < h(4)$ أي $0 < u_{n+1} \leq 4$ إذن $P(n+1)$ محققة			
***حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 4$			
ب) لنبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$			
لدينا من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n e^{1-\frac{1}{4}u_n}}{u_n} = e^{1-\frac{1}{4}u_n}$ و لدينا: $0 < u_n < 4$	0.25		
يكافئ: $0 < -\frac{1}{4}u_n < -1$ يكافئ $1 < 1-\frac{1}{4}u_n < 0$ ومنه $1 < e^{1-\frac{1}{4}u_n} < e$ إذن $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$	0.25		
استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n): بما أن $u_n > 0$ و $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$			

4) لنبين أن المتتالية (u_n) متقاربة: بما أن المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$ ومحدودة من الأعلى بالعدد 4 فإنها متقاربة نحو عدد حقيقي l حيث $l \leq 4$ حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$: بما أن (u_n) متقاربة فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$ ومنه $h(l) = l$ يعني: (مرفوض) $l = 0$ أو $l = 4$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$	0.25 0.25 0.25	0.75
5) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$ أ) لنبين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $u_n = e^{n-\frac{1}{4}S_n}$: نسمي الخاصية $u_n = e^{n-\frac{1}{4}S_n}$ بـ $P(n)$. *لدينا $u_1 = e^{\frac{3}{4}}$ و $u_1 = e^{1-\frac{1}{4}S_1} = e^{1-\frac{1}{4}u_0} = e^{\frac{3}{4}}$ ومنه $P(1)$ محققة **نفرض $P(n)$ محققة من أجل n عدد طبيعي كيفي غير معدوم ونثبت صحة الخاصية $P(n+1)$: لدينا $u_n = e^{n-\frac{1}{4}S_n}$ ولدينا: $u_{n+1} = u_n e^{1-\frac{1}{4}u_n}$ و $S_{n+1} = S_n + u_n$ ومنه: $u_{n+1} = e^{n-\frac{1}{4}S_n} \times e^{1-\frac{1}{4}u_n} = e^{1+n-\frac{1}{4}(S_n+u_n)} = e^{1+n-\frac{1}{4}(S_{n+1})}$ إذن $P(n+1)$ محققة ***حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}^*$: $u_n = e^{n-\frac{1}{4}S_n}$	0.5	1
ب) استنتاج أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = 4$ لدينا $u_n = e^{n-\frac{1}{4}S_n}$ ومنه $S_n = 4(n - ln(u_n))$ ومنه $\frac{S_n}{n} = 4\left(1 - \frac{ln(u_n)}{n}\right)$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 4\left(1 - \frac{ln(u_n)}{n}\right) = 4$ (لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$)	0.5	
التـــمرين الثاني:	4.5نقاط	
1- أ) لنبين أن: $P(A) = \frac{13}{112}$: $P(A) = \frac{3}{4} \times \frac{C_4^3}{C_8^3} + \frac{1}{4} \times \frac{A_4^2 + A_2^2}{A_8^2} = \frac{13}{112}$ حساب احتمال كلا من الحادثين B و C: $P(B) = \frac{3}{4} \times \frac{C_3^3 + C_5^3}{C_8^3} + \frac{1}{4} \times \frac{A_3^2 + A_5^2}{A_8^2} = \frac{59}{224}$ $P(C) = \frac{3}{4} \times \frac{C_1^1 C_7^2}{C_8^3} + \frac{1}{4} \times \frac{2A_1^1 A_7^1}{A_8^2} = \frac{11}{32}$	0.25 0.5 0.5	2.75
ب) لنبين أن: $P(A \cap B) = \frac{11}{224}$: $P(A \cap B) = \frac{3}{4} \times \frac{C_3^3}{C_8^3} + \frac{1}{4} \times \frac{A_3^2 + A_2^2}{A_8^2} = \frac{11}{224}$ استنتاج $P(A \cup B)$ و $P_A(B)$: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{37}{112}$ $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{11}{26}$	0.25 0.25 0.5	
ج) لدينا : $P(A) \times P(B) = \frac{767}{25088}$ و $P(A \cap B) = \frac{11}{224}$ أي : $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ نستنتج أن الحدثان A و B غير مستقلان (أو $P_A(B) \neq P(B)$)	0.5	
2- ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكرات السوداء المتبقية في الصندوق U_2. أ) لنبين أن $P(X = 2) = \frac{15}{28}$: لدينا $P(X = 2) = \frac{3}{4} \times \frac{C_3^1 C_5^2}{C_8^3} + \frac{1}{4} \times \frac{2A_3^1 A_5^1}{A_8^2} = \frac{120}{224} = \frac{15}{28}$ تعيين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X : لدينا قيم المتغير X هي $0; 1; 2; 3$ $P(X = 0) = \frac{3}{4} \times \frac{C_3^3}{C_8^3} = \frac{3}{224}$ $P(X = 1) = \frac{3}{4} \times \frac{C_3^2 C_5^1}{C_8^3} + \frac{1}{4} \times \frac{A_3^2}{A_8^2} = \frac{51}{224}$ $P(X = 3) = \frac{3}{4} \times \frac{C_5^3}{C_8^3} + \frac{1}{4} \times \frac{A_5^2}{A_8^2} = \frac{50}{224}$	0.25 0.25 0.25 0.25	1.75

x_i	0	1	2	3	المجموع
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{224}$	$\frac{51}{224}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{50}{224}$	1

ب) حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$: $E(x)=\frac{(51+240+150)}{224}=\frac{441}{224}=\frac{63}{32}$ — 0.5

استنتاج $E(2025X+1446)$: $E(2025X+1446)=2025E(x)+1446=\frac{173847}{32}$ — 0.25

التـــمرين الثالث: 4.5نقاط

I. نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود: $P(z)=z^3-12z^2+48z-128$

1) تعيين العددين الحقيقيين a و b بحيث: $P(z)=(z-8)(z^2+az+b)$ — 0.5

لدينا 8 جذر لكثير الحدود $P(z)$ وباستعمال القسمة الإقليدية نجد :

$z^3-12z^2+48z-128$	$z-8$
z^3-8z^2	$z^2-4z+16$
$-4z^2+48z-128$	
$-4z^2+32z$	
$16z-128$	
$16z-128$	
0	

0.25 — 0.25

$P(z)=(z-8)(z^2-4z+16)$ ومنه $a=-4$ و $b=16$

2) لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z التالية $P(z)=0$: — 01

$P(z)=0$ تعني : $(z-8)=0$ أي $z=8$ — 0.25

أو $(z^2-4z+16)=0$ لدينا $\Delta=-48<0$ ومنه المعادلة تقبل حلين مترافقين: — 0.25

$z_1=\frac{4-4i\sqrt{3}}{2}=2-2i\sqrt{3}$ و $z_2=\overline{z_1}=2+2i\sqrt{3}$ إذن: $S=\{8;2-2i\sqrt{3};2+2i\sqrt{3}\}$ — 0.5

II. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A , B و C لواحقها على الترتيب هي: $z_A=2-2\sqrt{3}i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=8$ — 1.25

1- أ- كتابة على الشكل الأسي كلا من z_A و z_B: — 0.5

لدينا: $|z_A|=4$ ومنه $z_A=2-2\sqrt{3}i=4\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=4\left(cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\,sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=4e^{-\frac{\pi}{3}i}$ — 0.25

$z_B=\overline{z_A}=4e^{\frac{\pi}{3}i}$

ب- لنبين أن $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{2025}-\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{1446}=0$: لدينا: — 0.5

$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{2025}-\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{1446}=\left(\frac{4e^{-\frac{\pi}{3}i}}{4e^{\frac{\pi}{3}i}}\right)^{2025}-\left(\frac{4e^{-\frac{\pi}{3}i}}{4e^{\frac{\pi}{3}i}}\right)^{1446}=e^{1350\pi i}-e^{964\pi i}=1-1=0$

2- حساب الطويلة وعمدة للعدد حيث $L=\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}$: — 1.25

لدينا : $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=e^{\frac{\pi}{3}i}$ ومنه : $L=\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}=\frac{2-2i\sqrt{3}-8}{2+2i\sqrt{3}-8}$ — 0.75

$|L|=\left|e^{\frac{\pi}{3}i}\right|=1$ و $\arg\left(e^{\frac{\pi}{3}i}\right)=\frac{\pi}{3}$

استنتاج طبيعة المثلث ABC:

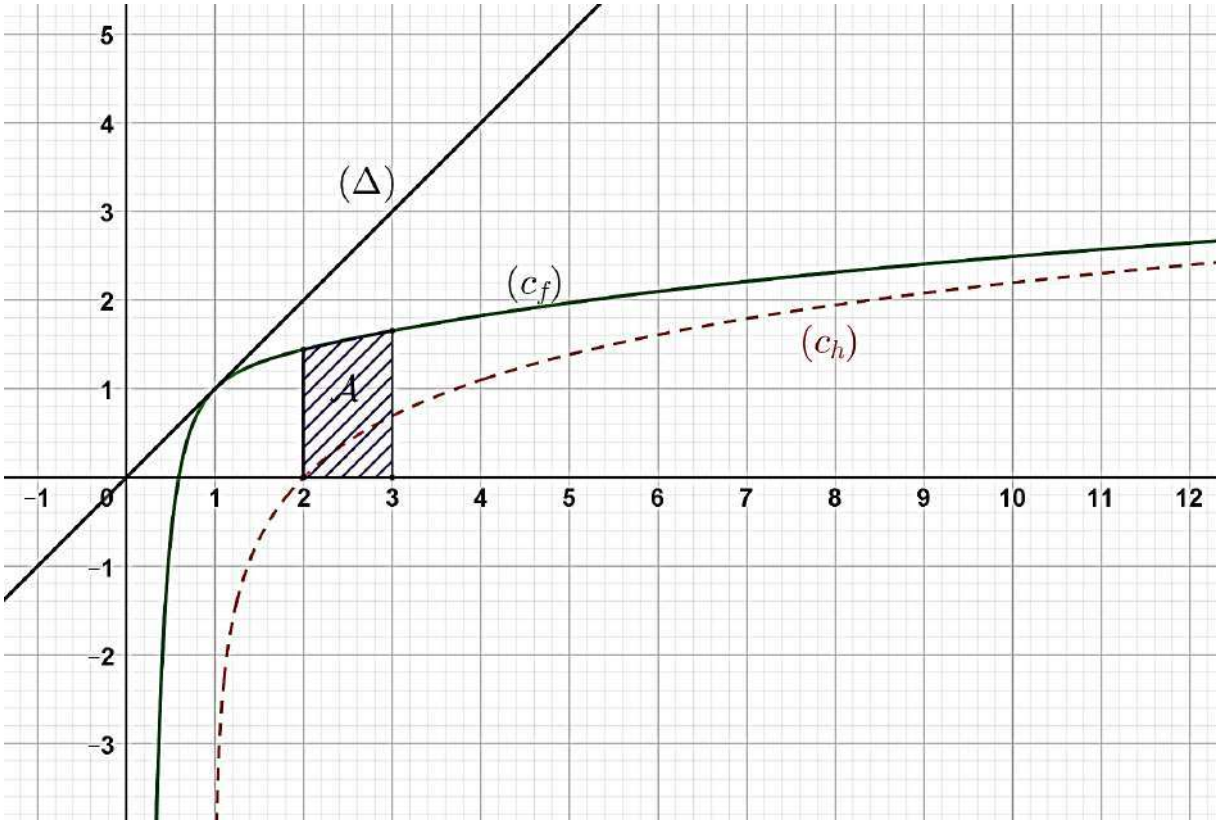
لدينا $|L|=1$ ومنه $CA=CB$ ولدينا $arg(L)=\frac{\pi}{3}$ يعني $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA})=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ إذن المثلث ABC متقايس الأضلاع. — 0.5

3- تعيين مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث : $\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)=2k\pi$ و $k\in\mathbb{Z}$ — 0.5

لدينا $\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)=2k\pi$ معناه $(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM})=2k\pi$، إذن: مجموعة النقط M هي المستقيم (AB) باستثناء $[AB]$ — 0.25 — 0.25

التـــــمرين الرابع		6.5 نقاط
نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{2x-1}{x^2}+\ln x$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. الوحدة $2cm$		
1) حساب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:		0.75
$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$ (لأن $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-1}{x^2}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x)$)	0.25	
تفسير النتيجة بيانيا: المنحنى (C_f) يقبل حامل محور التراتيب كمستقيم مقارب (معادلته $x=0$)	0.25	
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ (لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x^2}=0$).	0.25	
2) أ) إثبات أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{x^2-2x+2}{x^3}$:		1.75
f تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا : $f'(x)=\frac{(2x^2-2x(2x-1))}{x^4}+\frac{1}{x}=\frac{2x^2-4x^2+2x}{x^4}+\frac{1}{x}$ $=\frac{-2x^2+2x+x^3}{x^4}=\frac{x^2-2x+2}{x^3}$	0.5	
ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f : لدينا $x^2-2x+2>0$ لأن $\Delta<0$		
ولدينا أيضا $x^3>0$ لأن $x\in]0;+\infty[$	0.25	
ومنه $f'(x)>0$ إذن f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$	0.25	
تشكيل جدول التغيرات:	0.25	
ج) لنبين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β حيث $0.5<\beta<0.6$:		
لدينا g مستمرة ومتزايدة تماما على $]0;+\infty[$ ولدينا $\begin{cases}f(0.5)\simeq -0.69\\ f(0.6)\simeq 0.04\end{cases}$ معناه: $f(0.5)f(0.6)<0$	0.5	
ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β حيث $0.5<\beta<0.6$.		
3) كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1: $y=f'(1)(x-1)+f(1)=1(x-1)+1=x$	0.5	0.5
4) نعتبر الدالة h المعرفة على $]1;+\infty[$ كما يلي: $h(x)=ln(x-1)$ ، (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.		
أ) لنبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$: $f(x)>h(x)$	0.25	
لدينا من أجل كل x من $]1;+\infty[$: $\begin{cases}2x-1>1\\ x>x-1\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}\frac{2x-1}{x^2}>0\\ ln(x)>ln(x-1)\end{cases}$ وبجمع المتباينتين طرفا لطرف نجد: $f(x)>h(x)$		
ب) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-h(x)]$:		1
$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-h(x)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{2x-1}{x^2}+ln(x)-ln(x-1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{2x-1}{x^2}+ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]=0$	0.25	
لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)=1$ و $ln1=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}\right)=0$	0.25	
الاستنتاج: المنحنى (C_h) منحنى مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$		
ج) لنبين أن (C_h) هو صورة التمثيل البياني للدالة $x\mapsto \ln x$ بانسحاب يطلب تعين شعاعه:		
لدينا $h(x)=ln(x-1)$ معناه (C_h) هو صورة التمثيل البياني للدالة $x\mapsto \ln x$ بالانسحاب الذي شعاعه: $\vec{v}=1\vec{\imath}$	0.25	

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

0.75	0.25 0.25 0.25	5) إنشاء كلا من (T) ، (C_h) و (C_f) 
1.75	0.5	6) α عدد حقيقي . أ) لنبين أن الدالة G المعرفة على $]\alpha;+\infty[$ بـ $G(x)=(x-\alpha)ln(x-\alpha)-x$ هي دالة أصلية للدالة g حيث $g(x)=ln(x-\alpha)$ على $]\alpha;+\infty[$: G تقبل الاشتقاق على $]\alpha;+\infty[$ ولدينا: $]0;+\infty[$ $G'(x)=ln(x-\alpha)+\frac{1}{x-\alpha}\times(x-\alpha)-1=ln(x-\alpha)=g(x)$ إذن G دالة أصلية لـ g على المجال $]\alpha;+\infty[$
	0.5	ب) استنتج دالة أصلية للدالة $x\longmapsto ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ على $]1;+\infty[$ لدينا من أجل كل x من $]1;+\infty[$ فإن $ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=ln(x)-ln(x-1)$ ومنه دالة أصلية $x\longmapsto ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ على $]1;+\infty[$ هي : $x\longmapsto xln(x)-x-\left((x-1)ln(x-1)-x\right)=xlnx-(x-1)ln(x-1)$
	0.25 0.5	ج) حساب المساحة $\mathcal{A}$ للمستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_h) والمستقيمين اللذين معادلتاهما: $x=3$ و $x=2$ لدينا من أجل $x\in[2;3]$: $f(x)>h(x)$ ومنه : $\mathcal{A}=\int_2^3\left(f(x)-h(x)\right)dx=\int_2^3\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right)dx$ $=\left[2\,ln(x)+\frac{1}{x}+xlnx-(x-1)ln(x-1)\right]_2^3$ $=\left[5ln(3)-\frac{1}{6}-6ln(2)\right]=\left[ln\left(\frac{243}{64}\right)-\frac{1}{6}\right]\ u.a$