

إختبار الفصل الثالث في مادة الرياضيات

اختر أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

U_1 و U_2 صندوقان متماثلان حيث: U_1 يحتوي على 6 كرات تحمل الأرقام 1, 1, 1, 2, 2, 2 و U_2 يحتوي على 4 كرات تحمل الأرقام 1, 1, 2, 2.

نختار عشوائيا صندوق ثم نسحب منه كرية واحدة عشوائيا.

(1) شكل شجرة الاحتمال المنمذجة لهذه التجربة.

(2) أحسب احتمال سحب كرية تحمل الرقم 1.

(3) إذا كانت الكرية المسحوبة تحمل الرقم 1 ما هو احتمال أن تكون من الصندوق U_1 .

نجعل محتوى الصندوقين في صندوق واحد ثم نسحب كرتين على التوالي دون ارجاع.

(1) ما هو احتمال سحب كرتين من نفس الرقم.

(2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحبة مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين.

(أ) ما هي قيم المتغير العشوائي X الممكنة.

(ب) عرّف قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضي.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

(1) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$. الدالة المعرفة على المجال $\left[\frac{3}{8}; +\infty\right[$

$$f(x) = \frac{8x-3}{2x+1}$$

(C_f) تمثيلها البياني و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ كما هو مبين في الشكل أدناه.

أ- شكل جدول تغيرات الدالة f ,

استنتج أنه من أجل $x \in \left[\frac{3}{8}; +\infty\right[$ فإن: $0 \leq f(x) < 4$

ب- عيّن العددين الحقيقيين α و β حيث: $(\alpha > \beta)$ ، حلي المعادلة $f(x) = x$

واستنتج فاصلتي نقطتي تقاطع (C_f) والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ ثم عيّن بيانيا وضعية (C_f) و (Δ)

(2) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على N بـ: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 5 \end{cases}$ و $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$

أ- أعد انشاء الشكل على ورقة الإجابة ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود: u_0, u_1, u_2, u_3 و v_0, v_1, v_2

والحدود: v_0, v_1, v_2

ب- خمن اتجاه تغير وتقارب كل من المتتاليتين: (u_n) و (v_n) .

(3) أ- أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n < 3$ و $3 < v_n \leq 5$.

ت- عيّن اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

(4) أ- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{14}{(2v_n + 1)(2u_n + 1)} \times (v_n - u_n)$$

واستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$0 < v_{n+1} - u_{n+1} < \frac{2}{3}(v_n - u_n)$$

ت- يبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$0 < v_n - u_n < 4 \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

ج- استنتج أن $\lim v_n - u_n$ واستنتج النهاية المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n) .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$. النقطة ذات اللاحقة $z_I = 1$.

(1) A, B نقطتان من المستوي لاحقتاهما على الترتيب $z_A = 1 - 2i$ و $z_B = -2 + 2i$. الدائرة (C) ذات القطر $[AB]$.

عين z_ω لاحقة النقطة ω مركز الدائرة (C) وعين نصف قطرها.

(2) D النقطة ذات اللاحقة $z_D = \frac{3+9i}{4+2i}$. أكتب z_D على الشكل الجبري ثم يبين أن D نقطة من (C) .

(3) E نقطة من (C) حيث: $(\vec{\omega I}; \vec{\omega E}) = \frac{\pi}{4}$.

عين طول $z_E + \frac{1}{2}$ وعمدة له. استنتج أن $z_E = \frac{5\sqrt{2}-2}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4}i$.

(4) R التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث: $z' + \frac{1}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}(z + \frac{1}{2})$.

أ- عين طبيعة التحويل R محددا عناصره المميزة.

ب- ما هي صورة النقطة F ذات اللاحقة $z_F = 2$ بالتحويل R .

التمرين الرابع: (7 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x - e + \ln(1 + 2e^{-2(x-e)})$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ- تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = -x + e + \ln(2 + e^{2(x-e)})$.

ت- أحسب $\lim f(x)$, $\lim f'(x)$.

ج- أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) أ- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (D) و (D') معادلتهما $y = x - e$ و $y = -x + \ln 2 + e$ عند $+\infty$ و عند $-\infty$ على الترتيب.

أ- أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيمين المقاربين (D) و (D') .

ج- بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x = \frac{1}{2} \ln 2 + e$ هو محور تناظر للمنحنى (C_f) .

(3) أنشئ (Δ) , (D) , (D') و (C_f) .

(4) n عدد طبيعي غير معدوم: $I = \int_{\ln \sqrt{2}+e}^{\ln \sqrt{3}+e} [f(x) - (x - e)] dx$ و $I_n = \int_0^1 \ln(1 + X^n) dx$.

أ- فسر هندسيا العدد I واحسب العدد I_1 .

ب- يبين أن: $0 \leq I_n \leq \ln 2$.

ج- عين اتجاه تغير المتتالية (I_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

(5) باستعمال: $\ln(1 + X) \leq X$ من أجل كل X من $]0; +\infty[$.

أ- استنتج أن: $0 \leq I + I_1 \leq \int_{\ln \sqrt{2}+e}^{\ln \sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)} dx - 1 + \ln 4$.

ب- أعط حصرًا للعدد $I + I_1$.

الموضوع الثانيالتمرين الأول : (04 نقاط)

- (1) يحتوي صندوق على 4 كرات خضراء ثلاثة منها تحمل الرقم 1 وواحدة تحمل الرقم 2 وكرتين حمراوين تحملان الرقمين 0 و-1 ، كل الكرات متماثلة ولا نفرق بينها عند اللمس.
- نسحب من الصندوق عشوائيا كرتين على التوالي بالإرجاع.
- أ- ما احتمال الحصول على كرتين جداء رقميهما سالب تماما.
- ب- ما احتمال الحصول على كرة حمراء في السحب الثاني.
- (2) نقوم الآن باستبدال الكرات الحمراء بـ n كرة بيضاء تحمل الرقم 2 حيث: $n > 1$ ونسحب من الصندوق عشوائيا كرتين على التوالي ودون إرجاع.
- ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع الرقمين المسجلين على الكرتين.
- أ- عيّن قيم المتغير العشوائي X ثم عزف قانون احتماله.
- ب- $E(X) = \frac{4n^2+22n+30}{(n+3)(n+4)}$ يبين أن الأمل الرياضي

التمرين الثاني: (04 نقاط)

- (u_n) المتتالية العددية المعرفة على N بـ: $u_0 = -1$ ، $u_1 = \frac{1}{2}$ و $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$
- (1) أحسب u_2 ثم تحقق أن (u_n) ليست حسابية وليست هندسية.
- (2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$
- يبن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول ثم استنتج عبارة n بدلالة n
- (3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $w_n = \frac{u_n}{v_n}$
- يبن أن المتتالية (w_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول ثم استنتج عبارة n بدلالة n
- (4) أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$
- ب- نضع: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ ، برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$
- ج- أحسب $\lim u_n$

التمرين الثالث : (05 نقاط)

- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة C ، المعادلة ذات المجهول z :
- $$(z^2 + 2z + 4)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$$
- (2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
- A, B, C و D نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب:
- $$z_D = -1 + i\sqrt{3} \text{ و } z_C = -1 - i\sqrt{3} , z_B = \sqrt{3} - i , z_A = \sqrt{3} + i$$
- أ. أكتب كلا من z_A, z_B, z_C و z_D على الشكل الأسّي.
- ب. تحقق أن: $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_C}$ ، ثم استنتج أن المستقيمين (AC) و (BD) متعامدان.

(3) z_n العدد المركب الذي طويلته $\frac{1}{2^n}$ و $\frac{2\pi}{3}n$ عمدة له حيث: n عدد طبيعي.

l_n العدد المركب المعروف بـ: $l_n = z_D \times z_n$.

أ. أكتب كلا من l_0 ، l_1 على الشكل الجبري.

ب. (u_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $u_n = |l_n|$.

- أثبت أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

- $M_0, M_1, \dots, M_n$ صور الأعداد المركبة $l_0, l_1, l_2, \dots, l_n$ على الترتيب.

- أحسب ، بدلالة n ، المجموع S_n حيث: $S_n = \|\overrightarrow{OM_0}\| + \|\overrightarrow{OM_1}\| + \dots + \|\overrightarrow{OM_n}\|$.

- أحسب $\lim S_n$.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = -4e^{2x} + 17e^x - 4$.

يَبَيِّن أَنَّهُ من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x) = -4(e^x - 4)(e^x - \frac{1}{4})$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = \frac{(4x+9)e^x - 4x}{9(1-e^x)}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(1) يَبَيِّن أَنَّهُ من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x ، $f(x) = -\frac{4}{9}x + \frac{e^x}{1-e^x}$.

(2) عَيِّن العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x : $f(x) = ax + b + \frac{1}{1-e^x}$.

(3) أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجالات مجموعة تعريفها.

(4) أ- يَبَيِّن أَنَّهُ من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x : $f'(x) = \frac{g(x)}{9(1-e^x)^2}$.

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(5) يَبَيِّن أَنَّهُ من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x : $f(-x) = -1 - f(x)$ ، ماذا تستنتج؟

(6) أ- يَبَيِّن أَنَّ (Δ_1) و (Δ_2) مستقيمان مقاربان للمنحنى (C_f) ومعادلتين لهما على الترتيب $y = -\frac{4}{9}x - 1$ و $y = -\frac{4}{9}x$.

ب- أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لكل من (Δ_1) و (Δ_2) .

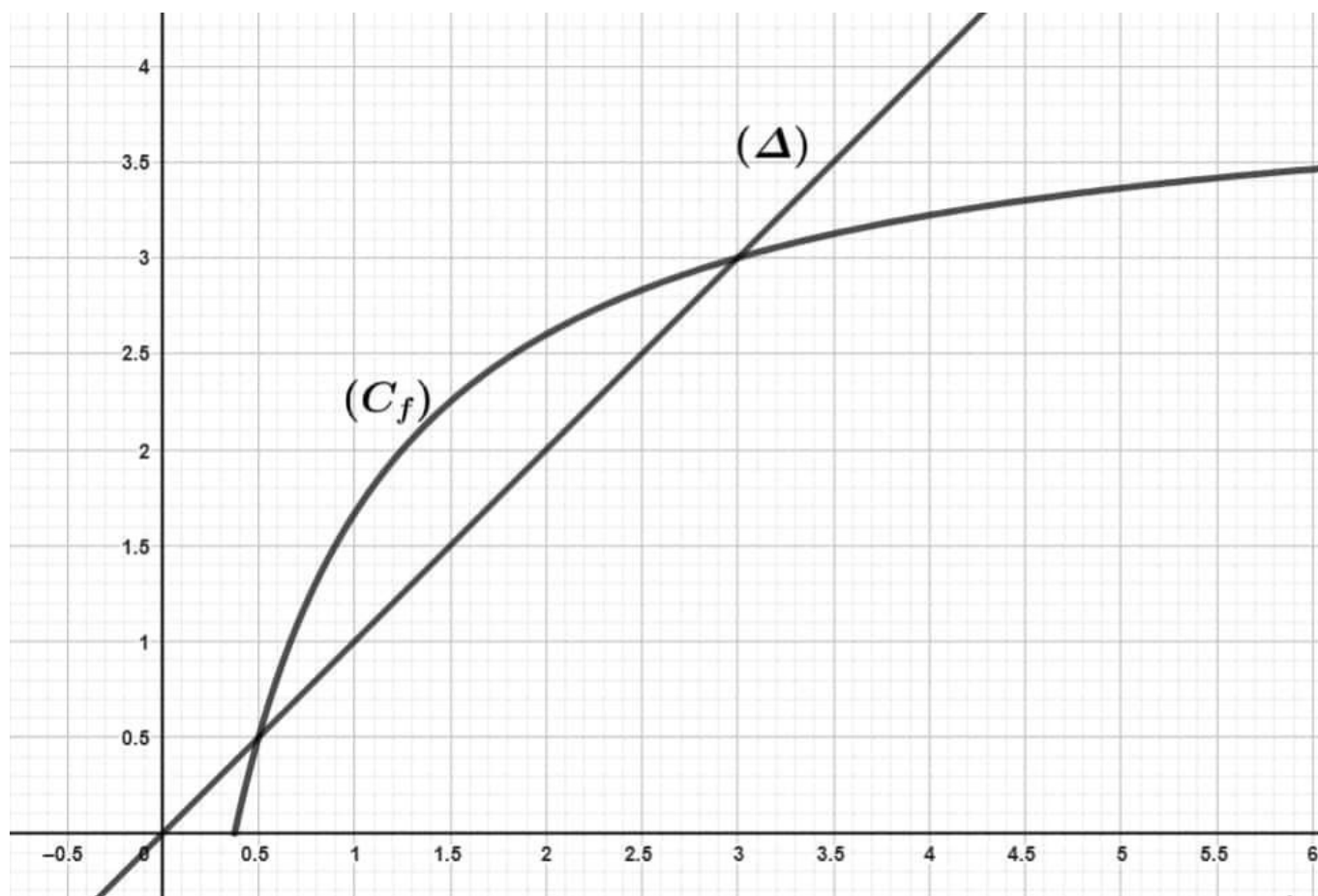
(7) أنشئ (Δ_1) و (Δ_2) و (C_f) .

(8) ناقش بيانها حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $\frac{e^x}{1-e^x} = m$.

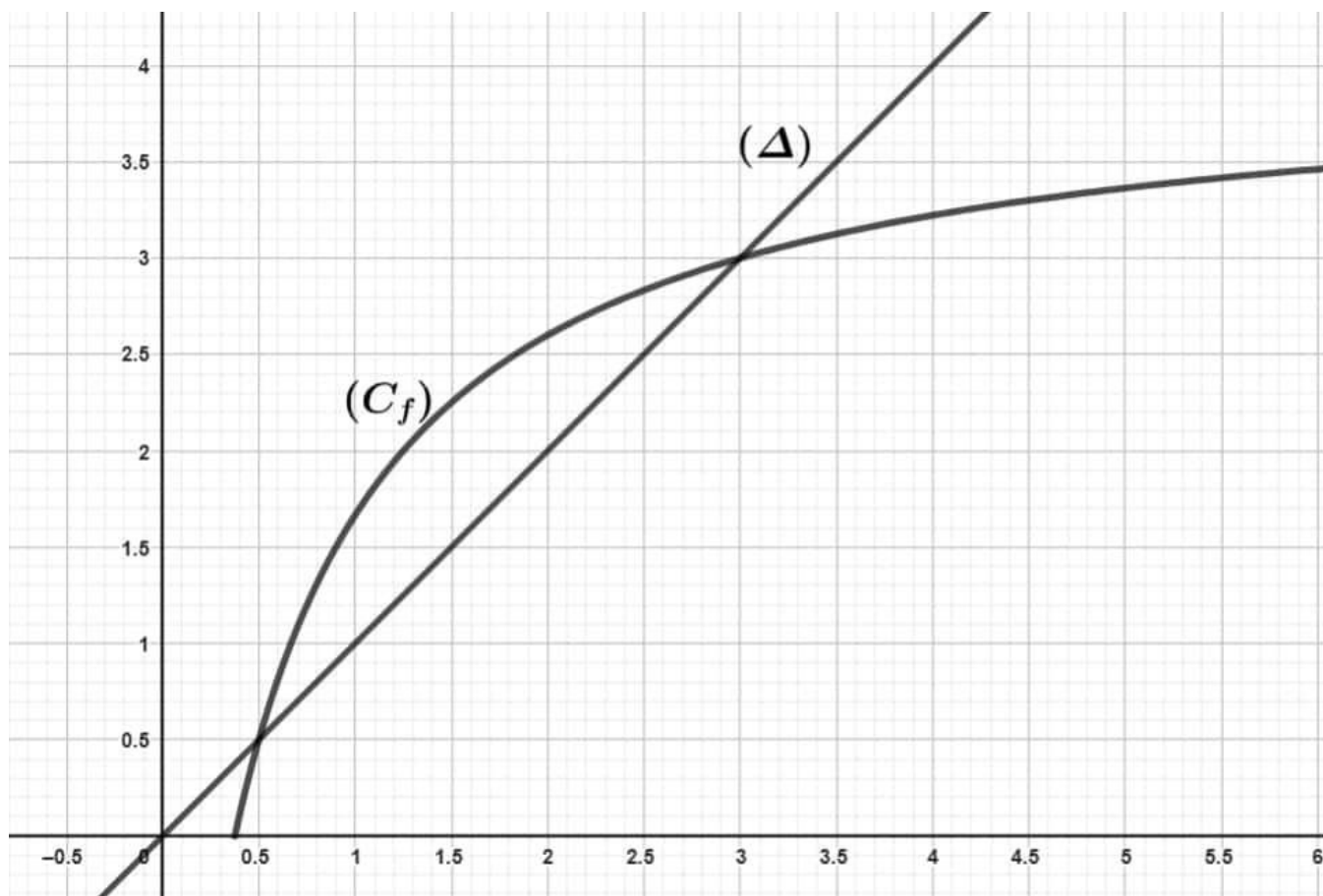
(9) أ- عَيِّن مساحة الحيز $A(\lambda)$ المحدد بالمنحنى (C_f) و (Δ_2) المسقيمين الذين معادلتها $x = -\ln 4$ و $x = \lambda$ مع $\lambda < -\ln 4$.

ت- أحسب $\lim A(\lambda)$.

الورقة المرفقة للتمرين الثاني الموضوع الأول (تعاد الورقة مع ورقة الإجابة) الاسم: اللقب:



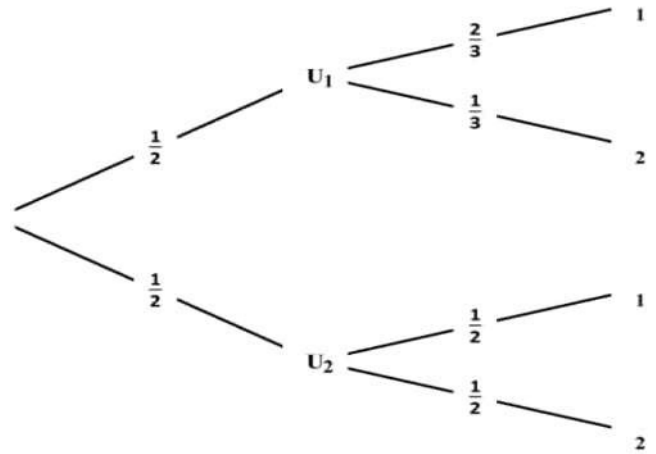
الورقة المرفقة للتمرين الثاني الموضوع الأول (تعاد الورقة مع ورقة الإجابة) الاسم: اللقب:



الاختبار الفصل الأول في مادة الرياضيات

تمرين الأول : (4 نقاط)

0.5



(1) احتمال سحب كرية تحمل الرقم 1.

0.5

$$P(\{1\}) = P(U_1 \cap \{1\}) + P(U_2 \cap \{1\})$$

$$= P(U_1)P_{U_1}(\{1\}) + P(U_2)P_{U_2}(\{1\}) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{12}$$

(2) إذا كانت الكرية المسحوبة تحمل الرقم 1 ما هو احتمال أن

تكون من الصندوق U_1 .

0.5

$$P_{\{1\}}(U_1) = \frac{P(U_1 \cap \{1\})}{P(\{1\})}$$

$$= \frac{P(U_1)P_{U_1}(\{1\})}{P(\{1\})} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}}{\frac{7}{12}} = \frac{4}{7}$$

نجعل محتوى الصندوقين في صندوق واحد

0.5

$$P(A) = \frac{A_6^2 + A_4^2}{A_{10}^2} = \frac{7}{15}$$

(1) قيم المتغير العشوائي X الممكنة.

$X = 2$ في حالة سحب كرتين تحملان الرقم 1

$X = 3$ في حالة سحب كرتين تحملان رقمين مختلفان

$X = 4$ في حالة سحب كرتين تحملان الرقم 2

(ب) قانون احتمال المتغير العشوائي X

$$P(X = 4) = \frac{A_4^2}{A_{10}^2} = \frac{2}{15}, P(X = 2) = \frac{A_6^2}{A_{10}^2} = \frac{1}{3}$$

$$P(X = 3) = \frac{A_6^1 \times A_4^1 \times 2}{A_{10}^2} = \frac{8}{15}$$

x_i	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$

0.25

$$E(X) = \frac{14}{5}$$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

$$f(x) = \frac{8x-3}{2x+1}$$

أ- شكل جدول تغيرات الدالة f .

$$f'(x) = \frac{14}{(2x+1)^2} > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4$$

x	$3/8$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	4

استنتج أنه من أجل $x \in \left[\frac{3}{8}; +\infty\right[$ فإن: $0 \leq f(x) < 4$

0.25

0.25

بما أن f متزايدة تماما على $\left[\frac{3}{8}; +\infty\right[$ و $f\left(\frac{3}{8}\right) = 0$ ،

$$f\left(\left[\frac{3}{8}; +\infty\right[\right) = [0; 4[\text{ فإن: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4$$

ب- عيّن العددين الحقيقيين α و β

حيث: $(\alpha > \beta)$ ، حلي المعادلة $f(x) = x$

$$\frac{-2x^2 + 7x - 3}{2x+1} = 0 \text{ معناه: } \frac{8x-3}{2x+1} = x$$

0.25

معناه: $\alpha = 3$ و $\beta = \frac{1}{2}$

فاصلتي نقطتي تقاطع (C_f) والمستقيم (Δ) هما حلي المعادلة :

0.25

$f(x) = x$ أي $\alpha = 3$ و $\beta = \frac{1}{2}$

عيّن بيانيا وضعية (C_f) و (Δ)

x	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ)	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) تحت (Δ)

0.25

(1) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على N

$$\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases} \text{ و } \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

أ- أعد انشاء الشكل على ورقة الإجابة ثم مثل على حامل

محور الفواصل الحدود: u_0, u_1, u_2, u_3

والحدود: v_0, v_1, v_2

التمرين الثالث : (4 نقاط)

عين Z_w لاحقة النقطة ω مركز الدائرة (C)

$$Z_w = \frac{Z_A + Z_B}{2} = \frac{-1}{2}$$

$$r = \frac{|Z_{AB}|}{2} = \frac{|-3+4i|}{2} = \frac{5}{2} \text{ نصف قطرها.}$$

$$Z_D = \frac{3+9i}{4+2i} \text{ النقطة ذات اللاحقة } (1)$$

أكتب Z_D على الشكل الجبري

$$Z_D = \frac{3+9i}{4+2i} = \frac{(3+9i)(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$$

$$wD = |Z_{wD}| = \left| 2 + \frac{3}{2}i \right| = \frac{5}{2} = r. (C) \text{ يبين أن } D \text{ نقطة من}$$

ومنه: $D \in (C)$

$$(2) \quad E \text{ نقطة من } (C) \text{ حيث: } (\overrightarrow{\omega I}; \overrightarrow{\omega E}) = \frac{\pi}{4}$$

طويلة $Z_E + \frac{1}{2}$

$$\left| Z_E + \frac{1}{2} \right| = \left| Z_E - \left(-\frac{1}{2} \right) \right| = |Z_E - Z_w| = wE = \frac{5}{2}$$

العمدة: لدينا $(\overrightarrow{\omega I}; \overrightarrow{\omega E}) = \frac{\pi}{4}$

$$(\overrightarrow{\omega I}; \overrightarrow{\omega E}) = \arg \left(\frac{Z_E - Z_w}{Z_I - Z_w} \right) = \arg(Z_E - Z_w) - \arg(Z_I - Z_w)$$

$$= \arg \left(Z_E - \left(-\frac{1}{2} \right) \right) - \arg \left(1 - \left(-\frac{1}{2} \right) \right)$$

$$= \arg \left(Z_E + \frac{1}{2} \right) - \arg \left(\frac{3}{2} \right) = \arg \left(Z_E + \frac{1}{2} \right) - 0 = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{استنتج أن } Z_E = \frac{5\sqrt{2}-2}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4}i$$

$$Z_E + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \frac{5\sqrt{2}}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4}i$$

$$Z_E = \frac{5\sqrt{2}-2}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4}i$$

$$(3) \quad z' + \frac{1}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}} \left(z + \frac{1}{2} \right) \text{ التحويل النقطي}$$

$$\begin{cases} wM' = wM \\ (\overrightarrow{wM}; \overrightarrow{wM'}) = \frac{\pi}{4} \end{cases} \text{ اي } \frac{Z_{M'} - Z_w}{Z_M - Z_w} = e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ معناه}$$

طبيعة التحويل R دوران مركزه النقطة w و زاويته $\frac{\pi}{4}$.

صورة النقطة F ذات اللاحقة $Z_F = 2$ بالتحويل R .

$$Z' = \frac{5}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2} = Z_E \text{ أي: } Z' + \frac{1}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}} \left(2 + \frac{1}{2} \right)$$

التمرين الرابع : (7 نقاط)

أ- التحقق أن: $f(x) = -x + e + \ln(e^{2(x-e)} + 2)$

$$f(x) = x - e + \ln(1 + 2e^{-2(x-e)})$$

$$= x - e + \ln \left(1 + \frac{2}{e^{2(x-e)}} \right) = x - e + \ln \left(\frac{e^{2(x-e)} + 2}{e^{2(x-e)}} \right)$$

$$= x - e + \ln(e^{2(x-e)} + 2) - \ln(e^{2(x-e)})$$

$$= x - e + \ln(e^{2(x-e)} + 2) - 2x + 2e = -x + e + \ln(e^{2(x-e)} + 2)$$

حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - e + \ln(1 + 2e^{-2(x-e)}) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x + e + \ln(e^{2(x-e)} + 2) = +\infty$$

ج- اتجاه تغير الدالة f وجدول تغيراتها.

$$f(x) = -x + e + \ln(e^{2(x-e)} + 2)$$

$$f'(x) = -1 + \frac{2e^{2(x-e)}}{e^{2(x-e)} + 2} = \frac{e^{2(x-e)} - 2}{e^{2(x-e)} + 2}$$

إشارة المشتقة من إشارة البسط لان المقام موجب

$$\text{لدينا } 0 = e^{2(x-e)} - 2 \text{ معناه } x = \frac{\ln 2}{2} + e$$

x	$-\infty$	$\frac{\ln 2}{2} + e$	$+\infty$
$e^{2(x-e)} + 2$	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+

الدالة متناقصة تماما على $\left] -\infty; \frac{\ln 2}{2} + e \right]$ ومتزايدة تماما على $\left[\frac{\ln 2}{2} + e; +\infty \right[$

x	$-\infty$	$\frac{\ln 2}{2} + e$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{3\ln 2}{2}$	$+\infty$

أ- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب (D) معادلته $y = x - e$ عند $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - e) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + 2e^{-2(x-e)}) = 0$$

ب- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب (D') معادلته $y = -x + \ln 2 + e$ عن $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (-x + e + \ln 2) = 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\ln 2 + \ln(e^{2(x-e)} + 2) = 0$$

وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيمين المقاربين (D) و (D') .

$$f(x) - (x - e) = \ln(1 + 2e^{-2(x-e)})$$

ندرس إشارة $1 + 2e^{-2(x-e)} - 1 = 2e^{-2(x-e)} > 0$

(D) فوق (C_f) ومنه $1 + 2e^{-2(x-e)} - 1 = 2e^{-2(x-e)} > 0$

$$I_{n+1} \leq I_n \text{ معناه: } \int_0^1 \ln(x^{n+1} + 1) dx \leq \int_0^1 \ln(x^n + 1) dx$$

$$I_{n+1} - I_n \leq 0 \text{ ومنه } I_n \text{ متناقصة}$$

0.25

بما ان I_n متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة

استعمال: $\ln(1 + X) \leq X$ لاستنتاج أن:

$$0 \leq I + I_1 \leq \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)} dx - 1 + \ln 4$$

0.5

$$\text{لدينا: } I = \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} \ln(1 + 2e^{-2(x-e)}) dx \text{ و } 2e^{-2(x-e)} > 0$$

$$\text{بوضع } X = 2e^{-2(x-e)} \text{ نجد: } \ln(1 + 2e^{-2(x-e)}) \leq 2e^{-2(x-e)}$$

$$\text{ومنه: } \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} \ln(1 + 2e^{-2(x-e)}) dx \leq \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)} dx$$

$$0 \leq I \leq \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)} dx \text{ فان } \ln(1 + 2e^{-2(x-e)}) > 0$$

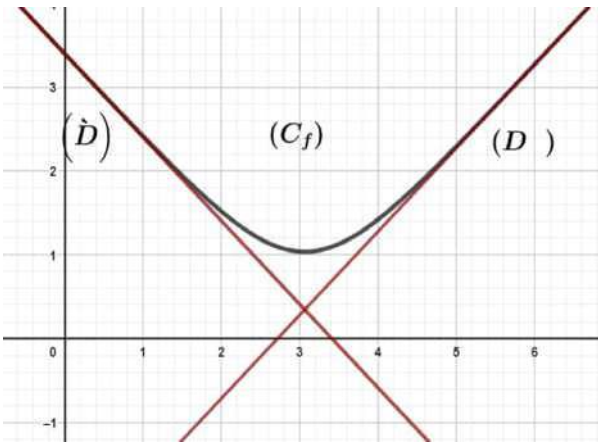
$$\text{معناه: } 0 \leq \ln 4 - 1 \leq I + I_1 \leq \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)} dx + \ln 4 - 1$$

0.25

$$\text{الحصر } 0 \leq I + I_1 \leq \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)} dx + \ln 4 - 1$$

$$\text{معناه: } 0 \leq I + I_1 \leq \left[-e^{-2(x-e)} \right]_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} + \ln 4 - 1$$

$$\text{معناه: } 0 \leq I + I_1 \leq \frac{-5}{6} + \ln 4 \text{ معناه: } 0 \leq I + I_1 \leq \frac{1}{6} + \ln 4 - 1$$



$$f(x) - (-x + e + \ln 2) = -\ln 2 + \ln(e^{2(x-e)} + 2)$$

$$= -\ln 2 + \ln 2 + \ln\left(\frac{e^{2(x-e)}}{2} + 1\right) = \ln\left(\frac{e^{2(x-e)}}{2} + 1\right)$$

ندرس إشارة $\frac{e^{2(x-e)}}{2} + 1 - 1$

0.25

$$\frac{e^{2(x-e)}}{2} > 0 \text{ ومنه } (C_f) \text{ فوق } (D')$$

ج- بين أن (Δ) ذو المعادلة $x = \frac{1}{2} \ln 2 + e$ هو محور تناظر لـ (C_f) .

0.5

$$\text{من اجل كل } x \in \mathbb{R} \text{ لدينا } \left(2\left(\frac{1}{2} \ln 2 + e\right) - x\right) \in \mathbb{R}$$

$$f(\ln 2 + 2e - x) = \ln 2 + e - x + \ln(1 + 2e^{-2(\ln 2 + e - x)})$$

$$= \ln 2 + e - x + \ln(1 + 2e^{-2\ln 2} e^{2(x-e)})$$

$$= \ln 2 + e - x + \ln\left(1 + 2 \frac{e^{2(x-e)}}{e^{2\ln 2}}\right)$$

$$= \ln 2 + e - x + \ln\left(1 + \frac{e^{2(x-e)}}{2}\right)$$

$$= \ln 2 + e - x + \ln\left(\frac{2 + e^{2(x-e)}}{2}\right)$$

$$= \ln 2 + e - x + \ln(2 + e^{2(x-e)}) - \ln 2$$

$$= e - x + \ln(2 + e^{2(x-e)}) = f(x)$$

1

أنشئ (Δ) ، (D) ، (D') و (C_f)

0.25

$$\text{تفسير العدد: } I = \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} [f(x) - (x - e)] dx$$

العدد I يمثل مساحة الحيز المحصور بين (C_f) والمستقيم (D) و

$$x = \ln\sqrt{3} + e, x = \ln\sqrt{2} + e$$

حساب العدد I_1 باستعمال التكامل بالتجزئة

$$I_1 = \int_0^1 \ln(x+1) dx = \left[x \ln(x+1) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx$$

0.5

$$= \ln 2 - \int_0^1 1 - \frac{1}{x+1} dx = \ln 2 - [x - \ln(x+1)]_0^1$$

$$= 2\ln 2 - 1 = \ln 4 - 1$$

يبين أن: $0 \leq I_n \leq \ln 2$

0.25

لدينا: $0 \leq x \leq 1$ ومنه: $0 \leq x^n \leq 1$ معناه: $1 \leq x^n + 1 \leq 2$ معناه:

$$0 \leq \ln(x^n + 1) \leq \ln 2$$

$$0 \leq I_n \leq \ln 2 \text{ ومنه: } 0 \leq \int_0^1 \ln(x^n + 1) dx \leq \int_0^1 \ln(2) dx$$

اتجاه تغير المتتالية I_n لدينا: $0 \leq x^{n+1} \leq x^n \leq 1$ ومنه:

0.5

$$0 \leq \ln(x^{n+1} + 1) \leq \ln(x^n + 1) \leq \ln(2)$$

الموضوع الثاني:

التمرين الأول : (04 نقاط)

أ- ما احتمال الحصول على كرتين جداء رقميهما سالب تماما.

$$P(A) = \frac{1 \times 4 \times 2}{6^2} = \frac{2}{9}$$

ب- ما احتمال الحصول على كرة حمراء في السحب الثاني.

$$P(B) = \frac{4 \times 2 + 2^2}{6^2} = \frac{1}{3}$$

1) نقوم الآن باستبدال الكرات الحمراء بـ n كرة بيضاء تحمل.

X يرفق بكل عملية سحب مجموع الرقمين

أ- عيّن قيم المتغير العشوائي X

$X = 2$ في حالة سحب كرتين تحملان الرقم 1

$X = 3$ في حالة سحب كرة تحمل الرقم 1 وكرة تحمل الرقم 2

$X = 4$ في حالة سحب كرتين تحملان الرقم 2

عرّف قانون احتماله.

$$P(X = 2) = \frac{A_3^2}{A_{n+4}^2} = \frac{6}{(n+4)(n+3)}$$

$$P(X = 3) = \frac{A_3^1 \times A_{n+1}^1 \times 2}{A_{n+4}^2} = \frac{6(n+1)}{(n+4)(n+3)}$$

$$P(X = 4) = \frac{A_{n+1}^2}{A_{n+4}^2} = \frac{n(n+1)}{(n+4)(n+3)}$$

x_i	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{6}{(n+4)(n+3)}$	$\frac{6(n+1)}{(n+4)(n+3)}$	$\frac{n(n+1)}{(n+4)(n+3)}$

$$E(X) = \frac{4n^2 + 22n + 30}{(n+4)(n+3)}$$

يبيّن أن الأمل الرياضي

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(u_n) معرفة بـ $u_0 = -1$ ، $u_1 = \frac{1}{2}$

و $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$

$$(3) \text{ أحسب } u_2: u_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

(u_n) ليست حسابية وليست هندسية.

بما أن $u_0 + u_2 \neq 2u_1$ فإن المتتالية ليست حسابية

بما أن $u_0 \times u_2 \neq (u_1)^2$ فإن المتتالية ليست هندسية

(4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$

نبيّن أن (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول

$$v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}u_{n+1}$$

$$= \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n = \frac{1}{2}\left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right) = \frac{1}{2}v_n$$

ومنه (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

$$\text{وحدها الأول: } v_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

عبارة v_n بدلالة n . $v_n = \frac{1}{2^n}$

(1) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $w_n = \frac{u_n}{v_n}$

يبيّن أن المتتالية (w_n) حسابية

$$w_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n} = \frac{v_n}{\frac{1}{2}v_n} + \frac{\frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n}$$

$$= 2 + \frac{u_n}{v_n} = 2 + w_n$$

(w_n) حسابية أساسها $r = 2$ وحدها الأول: $w_0 = \frac{u_0}{v_0} = -1$

عبارة (w_n) بدلالة n . $w_n = 2n - 1$

(2) أثبت أن: $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$

لدينا $w_n = \frac{u_n}{v_n}$ ومنه $u_n = v_n \times w_n$ إذن $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$

ب- نضع: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

نبيّن أن: $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$

$$s_n = w_0 v_0 + w_1 v_1 + w_2 v_2 + w_3 v_3 + \dots + w_n v_n$$

$$\frac{1}{q} s_n = \frac{1}{q} w_0 v_0 + \frac{1}{q} w_1 v_1 + \frac{1}{q} w_2 v_2 + \frac{1}{q} w_3 v_3 + \dots + \frac{1}{q} w_n v_n$$

$$\frac{1}{q} s_n = \frac{1}{q} w_0 v_0 + w_1 v_0 + w_2 v_1 + w_3 v_2 + \dots + w_n v_{n-1}$$

$$s_n = w_0 v_0 + w_1 v_1 + w_2 v_2 + w_3 v_3 + \dots + w_n v_n$$

$$\frac{1}{q} s_n - s_n = \frac{1}{q} w_0 v_0 + r v_0 + r v_1 + r v_2 + \dots + r v_{n-1} - w_n v_n$$

$$2s_n - s_n = -2 + 2 \left(\frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} \right) - \frac{2n-1}{2^n}$$

$$s_n = -2 + 4 - \frac{4}{2^n} - \frac{2n-1}{2^n} = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$$

ج- أحسب $\lim u_n$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2n-1}{2^n} = 0$$

التمرين الثالث : (5 نقاط)

(1) حل في C ، المعادلة ذات المجهول z :

$$(z^2 + 2z + 4)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$$

معناه: $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$ او $z^2 + 2z + 4 = 0$

ومنه $\Delta_1 = -4$ و $\Delta_2 = -12$

$$\begin{cases} z_1 = \sqrt{3} - i \\ z_2 = \sqrt{3} + i \end{cases} \text{ و } \begin{cases} z_3 = -1 - \sqrt{3}i \\ z_2 = -1 + \sqrt{3}i \end{cases} \text{ اذن}$$

A, B, C و D نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب :

$$z_D = -1 + i\sqrt{3}, z_C = -1 - i\sqrt{3}, z_B = \sqrt{3} - i, z_A = \sqrt{3} + i$$

أكتب كلا من z_D, z_C, z_B, z_A على الشكل الأسّي.

$$\arg(z_A) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ومنه } \begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ و } |z_A| = 2$$

$$z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \text{ ومنه:}$$

لدينا: $z_B = \overline{z_A}$ ومنه $|z_B| = |z_A| = 2$ و

$$z_B = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} \text{ اذن } \arg(z_B) = -\arg(z_A) = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$z_D = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ و } z_C = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}} \text{ بنفس الطريقة نجد:}$$

$$\frac{z_D - z_B}{z_A - z_C} = \frac{-1 + i}{1 + i} = i$$

استنتج أن المستقيمين (AC) و (BD) متعامدان.

$$\arg\left(\frac{z_D - z_B}{z_A - z_C}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$(BD) \perp (AC)$$

(1) z_n العدد المركب الذي طويلته $\frac{1}{2^n}$ و $\frac{2\pi}{3}$ عمدة له l_n العدد المركب

$$l_n = z_D \times z_n$$

أ. أكتب كلا من l_0, l_1 على الشكل الجبري.

$$z_n = \frac{1}{2^n} e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$l_0 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \times \frac{1}{2^0} e^{i0} = -1 + i\sqrt{3}$$

$$l_1 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \times \frac{1}{2^1} e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

أ. المتتالية المعرفة كما يلي: $u_n = |l_n|$

أثبت أن المتتالية (u_n) هندسية

0.5

$$u_n = |l_n| = \left| \frac{1}{2^n} e^{i\frac{2\pi}{3}n} \times 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \right| = \frac{2}{2^n}$$

0.25

(u_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدّها الأول $u_0 = 2$

أحسب ، بدلالة n ، المجموع S_n حيث:

$$S_n = \|\overrightarrow{OM_0}\| + \|\overrightarrow{OM_1}\| + \dots + \|\overrightarrow{OM_n}\|$$

0.25

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$= 2 \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 4 \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right)$$

- أحسب $\lim S_n$

0.25

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 4$$

التمرين الرابع : (7 نقاط)

g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = -4e^{2x} + 17e^x - 4$$

0.25

يبيّن أن

$$g(x) = -4(e^x - 4)(e^x - \frac{1}{4})$$

استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

0.25

x	$-\infty$	$-\ln 4$	$\ln 4$	$+\infty$
$ex-4$	-	-	0	+
$ex-1/4$	-	0	+	+
-2	-	-	-	-
$g(x)$	-	0	+	-

0.25

$$f(x) = \frac{(4x+9)e^x - 4x}{9(1-e^x)} \text{ المعرفة على } \mathbb{R}^* \text{ ب:}$$

0.25

يبيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x ،

$$f(x) = -\frac{4}{9}x + \frac{e^x}{1-e^x}$$

0.25

(4) عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل x :

$$f(x) = \frac{-4}{9}x - 1 + \frac{1}{1-e^x}$$

0.25

(5) أحسب نهايات الدالة f

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

0.25

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

0.25

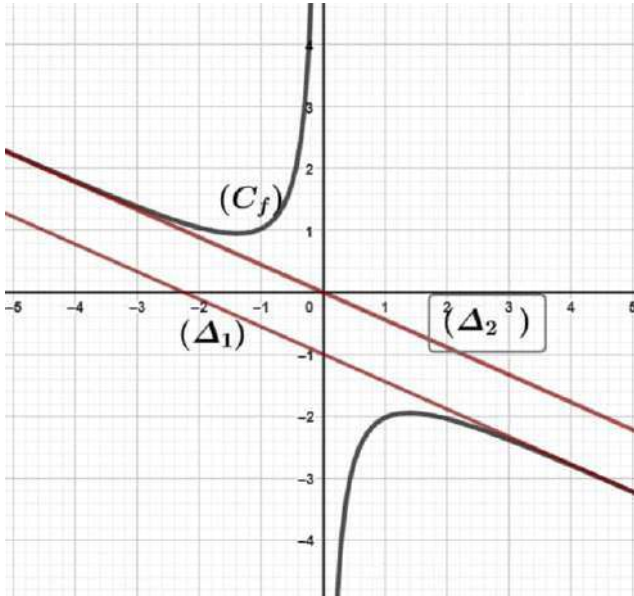
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

0.25

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

0.25

x	$-\infty$	0	$+\infty$
الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ_1)	فوق (C_f) (Δ_1)		تحت (C_f) (Δ_1)



1

(1) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و

$$\begin{aligned} \text{إشارة حلول المعادلة } \frac{e^x}{1-e^x} = m \\ \frac{-4x}{9} + \frac{e^x}{1-e^x} = \frac{-4x}{9} + m \\ f(x) = \frac{-4x}{9} + m \end{aligned}$$

0.75

$m < -1$ يوجد حل واحد موجب

$-1 \leq m \leq 0$ لا يوجد حلول

$m > 0$ يوجد حل واحد سالب

(2) أ- عيّن مساحة الحيز $A(\lambda)$ المحدد بالمنحنى (C_f) و

(Δ_2) المسقيمين الذين معادلتهما $x = -\ln 4$

و $x = \lambda$ مع $\lambda < -\ln 4$

0.25

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \int_{\lambda}^{-\ln 4} f(x) - \left(-\frac{4}{9}x\right) dx = \int_{\lambda}^{-\ln 4} \frac{e^x}{1-e^x} dx \\ &= \left[\ln(1-e^x) \right]_{\lambda}^{-\ln 4} = -\ln\left(\frac{3}{4}\right) + \ln(1-e^{\lambda}) \end{aligned}$$

ب- أحسب $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda)$

0.25

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda) = -\ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

صفحة 7

0.25

(1) نبين أنّ $f'(x) = \frac{g(x)}{9(1-e^x)^2}$ ؛ إشارة المشتق

x	$-\infty$	$-\ln 4$	0	$\ln 4$	$+\infty$	
$g(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$

0.25

اتجاه تغير الدالة f

الدالة متناقصة تماما على كلا المجالين $]-\infty; -\ln 4]$ ، $[\ln 4; +\infty[$

ومتزايدة تماما على كلا المجالين $]-\ln 4; 0]$ ، $]0; \ln 4]$

0.25

شكل جدول تغيراتها.

x	$-\infty$	$-\ln 4$	0	$\ln 4$	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{8\ln 2 + 1}{9}$	$+\infty$	$-\frac{8\ln 2 - 1}{9}$	$-\infty$	$-\infty$

0.5

(2) يبين أنّ: $f(-x) = -1 - f(x)$

معناه: $f(-x) + f(x) = -1$

الاستنتاج: $w\left(0; \frac{-1}{2}\right)$ مركز تناظر لـ (C_f)

0.5

(3) أ- يبين أنّ (Δ_1) و (Δ_2) مستقيمان مقاربان للمنحنى (C_f)

ومعادلتين لهما على الترتيب

$$y = -\frac{4}{9}x \text{ و } y = -\frac{4}{9}x - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - \left(-\frac{4}{9}x\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{1-e^x} = 0$$

0.25

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \left(-\frac{4}{9}x - 1\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-e^x} = 0$$

0.25

ب- أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ_1)

$$f(x) - \left(-\frac{4}{9}x - 1\right) = \frac{1}{1-e^x}$$

0.25

x	$-\infty$	0	$+\infty$
الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ_1)	فوق (C_f) (Δ_1)		تحت (C_f) (Δ_1)

أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ Δ_2

$$f(x) - \left(-\frac{4}{9}x\right) = \frac{e^x}{1-e^x}$$