السنة: الثالثة ثانوي
الشعبة: علوم تجريبية

مدرسة الرجاء والتفوق الخاصة
Erradja wa Tafaouk Private School
ÉCOLE PRIVÉE

بكالوريا تجريبي

دورة: ماي 2026
إعداد: عبد المطلب

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 3سا و30د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بحدّها الأوّل $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{2u_n^2 + 1}}$.

1 - برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $0 \leq u_n \leq 1$.

2 - بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة، ثم استنتج أنّها متقاربة.

3 - أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = e^{\frac{1}{u_n^2}}$، هي متتالية هندسية أساسها e^2.

ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n، ثم عيّن أصغر عدد طبيعي n_0 بحيث من أجل كل $n \geq n_0$، $v_n > 2026^{25}$.

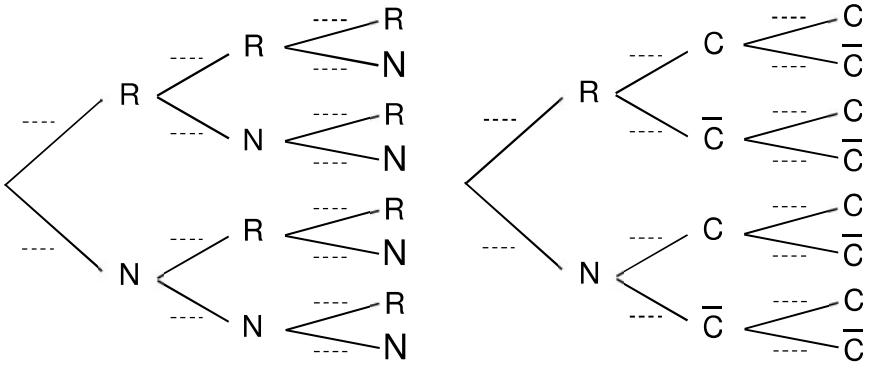
جـ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$. استنتج نهاية المتتالية (u_n).

4 - احسب بدلالة n المجموعين: $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ و $S'_n = \ln v_0 + \ln v_1 + \ldots + \ln v_n$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي صندوق U_1 على 3 كريات حمراء وكريتين سوداوين، ويحتوي صندوق U_2 على كريتين حمراوين تحمل الرقمين 1 ، 1 و4 كريات سوداء تحمل الأرقام 2 ، 1 ، 0 ، 0 ، أما الصندوق U_3 فيحتوي على 3 كريات حمراء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 0 و3 كريات سوداء تحمل الأرقام 3 ، 3 ، 1. (كل الكريات لا نفرّق بينها عند اللّمس).

نسحب من الصندوق U_1 كرية واحدة، إذا كانت حمراء نسحب من U_2 عشوائيا كريتين على التوالي بدون إرجاع، وإذا كانت سوداء نسحب من U_3 عشوائيا كريتين على التوالي مع الإرجاع. نسمي الحادثة R: "سحب كرية حمراء"، الحادثة N: "سحب كرية سوداء"، الحادثة C: "سحب كرية تحمل رقما زوجيا".



1 - انقل واملأ شجرتي الاحتمالات المقابلة والتي تنمذج هذه العملية.

2 - بيّن أنّ احتمال سحب 3 كريات من نفس اللّون هو $p(A) = \dfrac{7}{50}$.

3 - احسب احتمال سحب كرية حمراء من U_1 علما أنّ الكريتين المسحوبتين من U_2 و U_3 تحملان رقمين زوجيين.

4 - X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لثلاث كريات عدد الكريات الحمراء المسحوبة. عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X، ثم احسب أمله الرياضياتي $E(X)$، وتأكّد أنّ $E(5X - 7) = 0$.

5 - نضع الآن كل الكريات في صندوق واحد ونسحب منه عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات. احسب $p(E)$ احتمال سحب كرية واحدة سوداء على الأقل، و $p(F)$ احتمال سحب 3 كريات تحمل أرقاما مجموعها عددا فرديا.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

I - عيّن العددين المركبين z_1 و z_2 بحيث: $\begin{cases} z_1 + i\,\overline{z_2} = 2\sqrt{3} + 2i \\ \overline{z_1} - 2i\,z_2 = 3\sqrt{3} - 3i \end{cases}$.

II - في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. A و B نقطتان من هذا المستوي لاحقاتهما: $z_A = \sqrt{3} + i$ ، $z_B = 1 + \sqrt{3}i$. وحدة الطول $2cm$.

1 - اكتب كلا من z_A و z_B على الشكل المثلثي، ثم عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث: $\left(\frac{z_A}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{\overline{z_B}}{2}\right)^{n} = 0$.

2 - عيّن الطويلة وعمدة للعدد المركب $\frac{z_B}{z_A}$ ، ثم حدّد طبيعة المثلث OAB وقيسا للزاوية الموّجهة $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$.

3 - بيّن أنّ النقطتين A و B تنتميان إلى نفس الدائرة $(\mathscr{C})$ التي يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها ثم أنشئها.

4 - لتكن النقطة I من المستوي منتصف القطعة [AB] و C نظيرة المبدأ O بالنسبة للنقطة I.

أ) بيّن أنّ: $z_C = (1+\sqrt{3})(1+i)$ ، استنتج طبيعة الرباعي OACB ثم مثّله.

ب) بيّن أنّ: $\sqrt{2}OC = (1+\sqrt{3})OA$ و $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{12}$، ثم اكتب على الشكل المثلثي العدد $\frac{z_C}{z_A}$.

جـ) بيّن أنّ: $\frac{z_C}{z_A} = \frac{2+\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ، ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

5 - (E) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث: $|z| = |z_C|$. عيّن وأنشئ المجموعة (E).

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]-2;+\infty[$ بـ: $f(x) = -\ln(x^2 - 2x + 4) + 2\ln(x+2)$.

وليكن $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 - بيّن أنّ: $\lim\limits_{x \to -2^{>}} f(x) = -\infty$ وأنّ: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ ، ثم فسّر هندسيا النتيجتين.

2 - أ) أثبت أنّه من أجل كل $x > -2$ فإنّ: $f'(x) = \frac{-6x+12}{(x^2-2x+4)(x+2)}$ ، ثم شكّل جدول تغيرات f.

ب) اكتب معادلة لـ (Δ) مماس المنحني $(\mathscr{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة المعدومة.

3 - أ) ارسم المماس (Δ) والمنحني $(\mathscr{C}_f)$. وحدة الطول $2cm$.

ب) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = mx$.

4 - g الدالة العددية المعرّفة على المجال $]-2;+\infty[$ بـ: $g(x) = -\ln(x^2 - 2x + 4)$.

أ) ادرس الوضع النسبي للمنحني $(\mathscr{C}_f)$ والمنحني $(\mathscr{C}_g)$ الممثل للدالة g.

ب) بيّن أنّ الدالة $x \mapsto (x+2)\ln(x+2) - x$ أصلية للدالة $x \mapsto \ln(x+2)$ على المجال $]-2;+\infty[$.

جـ) استنتج حساب $\mathscr{A}$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بـ $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ والمستقيمين: $x = -1$ و $x = 1$.

5 - من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-2;+\infty[$ ، نعتبر النقطة M من $(\mathscr{C}_f)$ فاصلتها x والنقطة N من $(\mathscr{C}_{-g})$ فاصلتها x، ولتكن h الدالة المعرّفة على المجال $]-2;+\infty[$ بـ: $h(x) = f(x) + g(x)$.

أ) ادرس الوضع النسبي للمنحني $(\mathscr{C}_f)$ والمنحني $(\mathscr{C}_{-g})$ الممثل للدالة $-g$، مع تحديد نقاط تقاطعهما.

ب) ادرس تغيّرات h على $]-2;+\infty[$، واستنتج أنّ أكبر قيمة للمسافة MN على $[1;2]$ لما: $x = 2\sqrt{3} - 2$.

جـ) عيّن عددين حقيقيين a و b $(a < b)$ من المجال $]-2;1[\cup]2;+\infty[$ حتى تكون المسافة $MN = 2\ln 2$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

I - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية: $(2z-1)^2-6(2z-1)+25=0$.

II - في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. لتكن النقط A ، B و C من هذا المستوي التي لاحقاتها: $z_A=2+2i$ ، $z_B=2-2i$ و $z_C=-2\sqrt{2}$. ولتكن النقطة I منتصف القطعة [AC].

1 - احسب $|z_A|$ و $|z_C|$ ، استنتج طبيعة المثلث OAC، ثم مثّله حسب وحدة الطول $2cm$.

2 - احسب عمدة لكل من الأعداد المركبة: z_A ، z_C و $\frac{z_C}{z_A}$ ، ثم استنتج عمدة للعدد المركب z_I .

3 - اكتب z_I على الشكل الجبري، ثم احسب طويلته. استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\frac{5\pi}{8}$ و $\sin\frac{5\pi}{8}$.

4 - عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $\left(\frac{-2\sqrt{2}\,z_A}{z_B\times z_C}\right)^n$ حقيقيا، ثم احسب $\left(\frac{-2\sqrt{2}\,z_A}{z_B\times z_C}\right)^{1447}$.

5 - (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left|\frac{z-z_A}{z-z_C}\right|=1$. بيّن أنّ O تشمل (E) ثم عيّن وأنشئ (E).

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي صندوق على 10 كريات منها: 5 كريات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 1 ، 0 ، 0 ، أربع كريات سوداء تحمل الأرقام 2 ، 2 ، 1 ، 0، وكرية واحدة حمراء تحمل الرقم 3. (كل الكريات لا نفرّق بينها عند اللّمس).

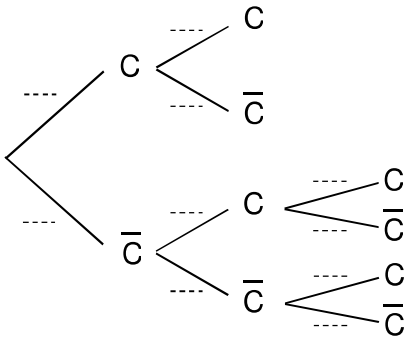
نسحب عشوائيا من هذا الصندوق كريتين في آن واحد. نسمي الحادثة A: "سحب كريتين من نفس اللّون"، الحادثة B: "سحب كريتين تحملان رقمين مختلفين".

1 - احسب الاحتمالات التالية: $p(A)$ ، $p(B)$ ، $p(A\cap B)$ ، $p(A\cup B)$ و $p_{\overline{B}}(A)$.

2 - X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لكريتين: الرقم الأكبر عند سحب كريتين تحملان رقمين أحدهما زوجي والآخر فردي، مجموع ترقيم الكريتين إذا كانا زوجيين، وجداء ترقيم الكريتين إذا كانا فرديين.

برّر أنّ مجموعة قيم X هي $\{0;1;2;3;4\}$، ثم عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر X، واحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

3 - نسحب الآن كرية واحدة من الصندوق، إذا كانت تحمل الرقم 2 نضعها جانبا ثم نسحب كرية واحدة أخرى، وإذا كانت لا تحمل الرقم 2 نعيدها إلى الصندوق ثم نسحب كريتين على التوالي مع الإرجاع. الحادثة C: "سحب كرية تحمل الرقم 2".



أ) انقل واملأ شجرة الاحتمالات المقابلة لنمذجة هذه العملية.

ب) احسب $p(D)$ احتمال بقاء كرية واحدة في الصندوق تحمل الرقم 2 على الأقل.

(في كل التمرين، تُعطى النتائج على شكل كسور غير قابلة للاختزال)

التمرين الثالث: (04 نقاط)

I - نعتبر الدالة f المعرّفة على $[\,2\,;\,1\,]$ بـ: $f(x)=x-(x-2)\ln x$.

1 - بيّن أنّه من أجل كل $1\le x\le 2$، $f'(x)=\dfrac{2-x\ln x}{x}$ وأنّ $f'(x)>0$ ، استنتج تغيرات f على $[\,2\,;\,1\,]$.

2 - بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $[\sqrt{e}\,;\,2]$ فإنّ $f(x)\ge x$.

II - من أجل كل عدد طبيعي n نعرّف المتتالية (u_n) بحدها الأول $u_0=\sqrt{e}$ و $u_{n+1}=f(u_n)$.

1 - برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ $u_n\in[\sqrt{e}\,;\,2]$.

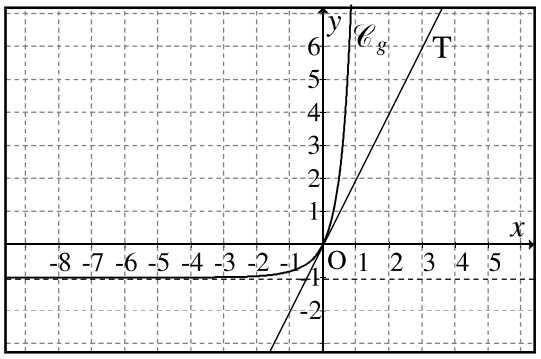
2 - ادرس اتّجاه تغيّر المتتالية (u_n)، بيّن أنّها متقاربة ثم احسب نهايتها.

3 - بيّن أنّه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$، $2-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(2-u_n)$ ، و $2-u_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^n(2-u_0)$. استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I - g الدالة المعرّفة والمتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=ae^{3x}+bxe^{2x}+c$ (a ، b و c أعداد حقيقية)

في الشكل المقابل: $(\mathscr{C}_g)$ هو التمثيل البياني للدالة g و(T) المماس لـ$(\mathscr{C}_g)$ عند O ويشمل النقطة $A(1;2)$. $(\mathscr{C}_g)$ يقبل مستقيما مقاربا موازيا لحامل محور الفواصل معادلته: $y=-1$.



1 - بقراءة بيانية: احسب $g'(0)$ وعيّن إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

2 - بقراءة بيانية: عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c.

في باقي التمرين، نفرض أنّ: $a=1$ و $b=c=-1$.

II - نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x+e^{-x}+\dfrac{x+2}{e^x+1}$.

ليكن $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 - بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ ، وأنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

2 - أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي x فإنّ: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{e^x(e^x+1)^2}$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f.

3 - أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحني $(\mathscr{C}_f)$ عند $+\infty$.

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x فإنّ: $e^{-x}+x>0$، استنتج وضعية $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة للمستقيم (Δ).

4 - أ) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=10$ تقبل حلا وحيدا α على $]-\infty\,;0[$ يطلب حصره بعددين صحيحين متتاليين.

ب) اكتب معادلة للمستقيم (Δ') الذي يوازي (Δ) ويشمل النقطة $B(\alpha;10)$.

5 - أ) ارسم المستقيمين (Δ) و(Δ') والمنحني $(\mathscr{C}_f)$ على المجال $]-\infty\,;\alpha[$. وحدة الطول $2cm$.

ب) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=x+m$.

6 - إذا علمت أنّه من أجل كل عدد حقيقي x موجب: $0\le\dfrac{x+2}{e^x+1}\le 1$، استنتج حصرا لمساحة الحيّز المستوي $\mathscr{A}$ المحدّد بالمنحني $(\mathscr{C}_f)$ ، المستقيم المقارب (Δ) والمستقيمين اللّذين معادلتاهما: $x=0$ و $x=1$.

انتهى الموضوع الثاني

وفّقكم الله أعزائي الطلاب في البكالوريا

تصحيح البكالوريا التجريبي 2026م

تمرين 1: "عبد المطلب"

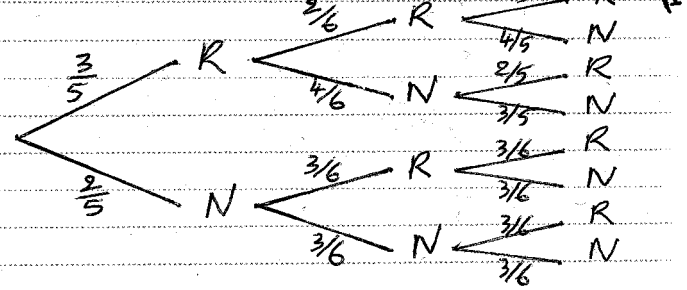
1) $0 \leq u_0 \leq 1$ و $u_0 = 1 : n = 0$: محققة
نفرض أن $0 \leq u_n \leq 1$ من أجل n كيفي ونبرهن صحة $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.
لدينا: $0 \leq u_n \leq 1$ ؛ $0 \leq u_n^2 \leq 1$ ؛ $0 \leq 2u_n^2 \leq 2$ ؛ $1 \leq 2u_n^2 + 1 \leq 3$ ؛ $1 \leq \sqrt{2u_n^2+1} \leq \sqrt{3}$
$\frac{1}{\sqrt{3}} \leq \frac{1}{\sqrt{2u_n^2+1}} \leq 1$ ؛ $0 \leq \frac{u_n}{\sqrt{2u_n^2+1}} \leq 1$ ، أي $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.
ومنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ؛ $0 \leq u_n \leq 1$

2) $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{\sqrt{2u_n^2+1}} - u_n = \frac{u_n(1-\sqrt{2u_n^2+1})}{\sqrt{2u_n^2+1}}$
$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1-\sqrt{2u_n^2+1})(1+\sqrt{2u_n^2+1})}{\sqrt{2u_n^2+1}(1+\sqrt{2u_n^2+1})} = \frac{-2u_n^2}{\sqrt{2u_n^2+1}(1+\sqrt{2u_n^2+1})} \leq 0$
طريقة ثانية: لدينا سابقا: $\frac{1}{\sqrt{2u_n^2+1}} \leq 1$ أي: $\frac{u_n}{\sqrt{2u_n^2+1}} \leq u_n$ ومنه: $u_{n+1} \leq u_n$ ؛ ومنه (u_n) متناقصة

3) أ) $v_{n+1} = e^{\frac{1}{u_{n+1}^2}} = e^{\frac{1}{2u_n^2+1}} = e^{\frac{2u_n^2+1}{u_n^2}} = e^{2+\frac{1}{u_n^2}} = e^2 \cdot e^{\frac{1}{u_n^2}} = e^2 v_n$ ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها e^2
ب) $v_n = v_0 \cdot q^n = e(e^2)^n = e^{2n+1}$
$e^{2n+1} > 2026^{25}$ ؛ $2n+1 > \ln 2026^{25}$ ؛ $v_n > 2026^{25}$
$n > \frac{25\ln 2026 - 1}{2}$ ؛ ومنه $n_0 = 95$
ج) $v_n = e^{\frac{1}{u_n^2}}$ ، $\ln v_n = \frac{1}{u_n^2}$ $(v_n \geq e)$
$u_n^2 = \frac{1}{\ln v_n}$ ، $u_n = \sqrt{\frac{1}{\ln v_n}}$ ؛ $u_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$
$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ (متقاربة)

4) حساب S_n: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$
$S_n = e\left(\frac{1-(e^2)^{n+1}}{1-e^2}\right) = \frac{e}{1-e^2}\left(1-e^{2n+2}\right)$
$S'_n = \ln v_0 + \ln v_1 + \dots + \ln v_n = \ln e^1 + \ln e^3 + \dots + \ln e^{2n+1}$
مجموع متتالية حسابية: $S'_n = 1 + 3 + \dots + 2n+1 = \frac{n+1}{2}(1+2n+1)$
$S'_n = (n+1)^2$

تمرين 2:

1) 

2) $P(A) = P(RNRNR) + P(NNNNN) = \frac{3}{5}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{5} + \frac{2}{5}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}$
$P(A) = \frac{1}{25} + \frac{1}{10} = \frac{7}{50}$

3) الحادثة B: سحب كريتين تحملان رقمين زوجيين
$P(B) = P(RNCNC) + P(NNCNC) = \frac{3}{25} + \frac{1}{90} = \frac{59}{450}$
$P_B(R) = \frac{P(B\cap R)}{P(B)} = \frac{P(CNCNR)}{P(B)} = \frac{3}{25}\times\frac{450}{59} = \frac{54}{59}$

4) $X = \{0; 1; 2; 3\}$
$P(X=0) = P(NNNNN) = \frac{2}{5}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{6} = \frac{1}{10}$
$P(X=1) = P(RNNNN) + P(NNRNN) + P(NNNNR) = \frac{11}{25}$
$P(X=2) = P(RNRNN) + P(RNNNR) + P(NNRNR) = \frac{21}{50}$
$P(X=3) = P(RNRNR) = \frac{3}{5}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{5} = \frac{1}{25}$

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{11}{25}$	$\frac{21}{50}$	$\frac{1}{25}$

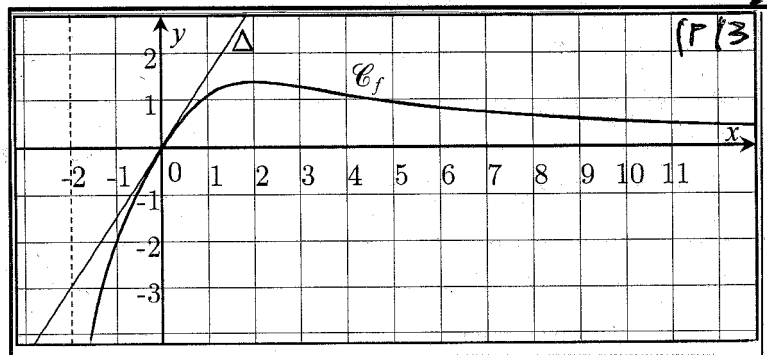
$E(X) = 0 + \frac{11}{25} + \frac{42}{50} + \frac{3}{25} = \frac{7}{5}$
$E(5X-7) = 5E(X) - 7 = 7 - 7 = 0$

5) $P(E) = 1 - \frac{C_8^3}{C_{17}^3} = \frac{78}{85}$ (عكس لا توجد سوداء)
$P(F) = \frac{C_8^3 + C_8^1 \times C_4^2}{C_{17}^3} = \frac{13}{85}$ (3 زوجية أو 2 زوجية و 1 فردي)

تمرين 3:

I- $\begin{cases} z_1 + i\bar{z}_2 = 2\sqrt{3} + 2i \\ \bar{z}_1 - 2iz_2 = 3\sqrt{3} - 3i \end{cases}$ ؛ $\begin{cases} z_1 + i\bar{z}_2 = 2\sqrt{3} + 2i \\ \bar{z}_1 - 2iz_2 = 3\sqrt{3} - 3i \end{cases}$
بطرح (2) من (1) نجد: $\begin{cases} \bar{z}_1 - iz_2 = 2\sqrt{3} - 2i \quad (1) \\ \bar{z}_1 - 2iz_2 = 3\sqrt{3} - 3i \quad (2) \end{cases}$
$z_2 = 1 + \sqrt{3}i$ أي $iz_2 = -\sqrt{3} + i$
ومنه $z_1 + i(1-\sqrt{3}i) = 2\sqrt{3} + 2i$ ؛ $z_1 = \sqrt{3} + i$

II- $|z_A| = 2$
$\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases}$
الشكل المثلثي (z_A): $z_A = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$
$\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ $|z_B| = 2$
الشكل المثلثي لـ z_B: $z_B = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$
$\left(\frac{z_A}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{z_B}{2}\right)^n = \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{2n} - \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n = e^{i\frac{n\pi}{3}} - e^{i\frac{n\pi}{3}}$



(P|3

ب) حلول المعادلة: $f(x)=mx$ هي فواصل نقط تقاطع $(\mathscr{C}_f)$ مع المستقيمات التي ميلها m وتشمل المبدأ.
$m\leq 0$: حل وحيد معدوم. $m=3/2$: حل مضاعف معدوم.
$0<m<3/2$: حلّ معدوم وآخر موجب.
$m>3/2$: حلّ معدوم وآخر سالب.

(P|4 $f(x)-g(x)=2\ln(x+2)$

$2\ln(x+2)>0$ لما $x+2>1$ أي $x>-1$.

$(\mathscr{C}_f)$ أعلى $(\mathscr{C}_g)$ لما $x>-1$. $(\mathscr{C}_g)$ يقطع $(\mathscr{C}_f)$ عند $A(-1;-\ln 4)$.

$(\mathscr{C}_f)$ أسفل $(\mathscr{C}_g)$ لما $-2<x<-1$.

ب) نضع: $k(x)=(x+2)\ln(x+2)-x$

لدينا: $k'(x)=\ln(x+2)+\frac{x+2}{x+2}-1=\ln(x+2)$

ومنه: $k(x)$ هي أصلية لـ $x\mapsto \ln(x+2)$

$A=\int_{-1}^{1}[f(x)-g(x)]dx=2\int_{-1}^{1}\ln(x+2)dx=2\left[(x+2)\ln(x+2)-x\right]_{-1}^{1}$ (→

$A=2(3\ln 3-2)\ u.a=8(3\ln 3-2)\ cm^2$

(P|5 لدراسة وضعية $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة لـ $(\mathscr{C}_g)$ ندرس إشارة $h(x)$

$h(x)=f(x)+g(x)=2\ln\left(\frac{x+2}{x^2-2x+4}\right)$

$h(x)>0$ لما $\frac{x+2}{x^2-2x+4}>1$ أي $\frac{x+2}{x^2-2x+4}-1>0$

أي $-x^2+3x-2>0$ ← $-$ | $+$ | $-$ ← 1 و 2

$x\in]1;2[$ لما $(\mathscr{C}_g)$ أعلى $(\mathscr{C}_f)$

$x\in]-2;1[\cup]2;+\infty[$ لما $(\mathscr{C}_g)$ أسفل $(\mathscr{C}_f)$

عند: $B(1;\ln 3)$ و $C(2;\ln 4)$ يقطع $(\mathscr{C}_g)$ $(\mathscr{C}_f)$.

ب) $h'(x)=f'(x)+g'(x)=\frac{2(-x^2-4x+8)}{(x+2)(x^2-2x+4)}$

x	-2		$2\sqrt{3}-2$		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$h(x)$	‖ $-\infty$	↗	$h(2\sqrt{3}-2)$	↘	$-\infty$

$MN=\sqrt{(f(x)+g(x))^2}=|h(x)|$

$MN=f(x)+g(x)=h(x)$: $x\in[1;2]$ لما

أكبر قيمة لـ MN لما $x=2\sqrt{3}-2$

$MN=-h(x)$: $x\in]-2;1[\cup]2;+\infty[$ لما (→

$MN=2\ln 2$ يعني $-2\ln\left(\frac{x+2}{x^2-2x+4}\right)=2\ln 2$

أي $\ln\left(\frac{x^2-2x+4}{x+2}\right)=\ln 2$ يعني $\frac{x^2-2x+4}{x+2}=2$

$x^2-4x=0$; $x(x-4)=0$ ← $x=0$ أو $x=4$

ومنه: $a=0$ و $b=4$ "عبد المطلب"

$\left(\frac{z_A}{2}\right)^{2n}-\left(\frac{z_B}{2}\right)^{n}=\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}-\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}$

$=2i\sin\frac{n\pi}{3}$

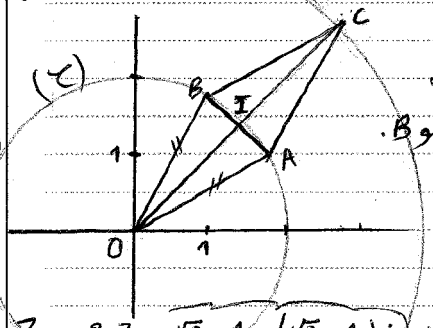
$k\in\mathbb{N}$ $(n=3k)$: ومنه $\frac{n\pi}{3}=k\pi$ يعني $\sin\frac{n\pi}{3}=0$

(2 $\frac{z_B}{z_A}=\frac{2e^{i\pi/3}}{2e^{i\pi/6}}=e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)}=e^{i\frac{\pi}{6}}$

ومنه: $\left|\frac{z_B}{z_A}\right|=1$ ، $\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)=\frac{\pi}{6}$

المثلث OAB: $OA=OB$ متساوي الساقين،

(E) $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})=\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)=\frac{\pi}{6}$



(3 الدائرة: $OA=OB$ التي مركزها O ونصف قطرها $r=2$ تشمل A و B.

(P|4 $z_I=\frac{z_A+z_B}{2}$

$z_I=\frac{\sqrt{3}+1}{2}+i\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

ومنه: $z_I=\frac{z_O+z_C}{2}$ ، $z_C=2z_I=\sqrt{3}+1+(\sqrt{3}+1)i$

بما أن $\begin{cases}\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}\\ OA=OB\end{cases}$ ، ومنه: $OACB$ معين.

ب) $OA=2$ و $OC=|z_C|=(1+\sqrt{3})\sqrt{2}$

$\sqrt{2}OC=2(1+\sqrt{3})=(1+\sqrt{3})OA$

$(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC})+(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB})=2(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC})=\frac{\pi}{6}$

ومنه: $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC})=\frac{\pi}{12}$ و $\hat{AOB}$ و $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC})$ منصف الزاوية $[OC]$

$\frac{z_C}{z_A}=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

$\frac{z_C}{z_A}=\frac{(1+\sqrt{3})(1+i)}{\sqrt{3}+i}=\frac{(1+\sqrt{3})(1+i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}=\frac{2+\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$ (→

$\begin{cases}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\\ \sin\frac{\pi}{12}=\frac{1}{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{2+\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sin\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\end{cases}$

(5 $OM=OC$: (E) هي الدائرة التي مركزها O و $r=OC$،

تمرين 4:

(1 $\lim_{x\to -2}f(x)=\lim_{x\to -2}\left(-\ln(x^2-2x+4)+2\ln(x+2)\right)=-\infty$ ($-\ln 12$ ، $-\infty$)

مستقيم مقارب عمودي لـ $(\mathscr{C}_f)$: $(x=-2)$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{(x+2)^2}{x^2-2x+4}\right)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x^2}{x^2}\right)=\ln 1=0$

مستقيم مقارب أفقي لـ $(\mathscr{C}_f)$ عند $(+\infty)$: $(y=0)$

(P|2 $f'(x)=-\frac{2x-2}{x^2-2x+4}+\frac{2}{x+2}=\frac{-6x+12}{(x+2)(x^2-2x+4)}$

x	-2		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$2\ln 2$	↘	0

ب) المماس: $(\Delta): y=f'(0)(x-0)+f(0)=\frac{3}{2}x$

الموضوع الثاني 2026

"عبد المطلب"

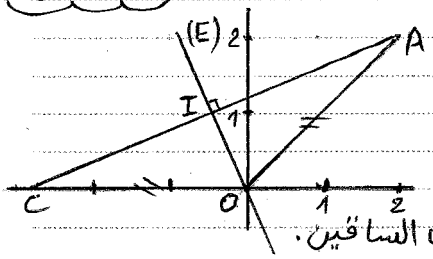
تمرين 1:

$z^2 - 6z + 25 = 0$: في $\mathbb{C}$ نحل المعادلة (I

$\Delta = -64 = 64i^2 = (8i)^2$

$z_1 = 3 - 4i$ و $z_2 = 3 + 4i$ حيث $2z - 1 = 3 - 4i$ أو $2z - 1 = 3 + 4i$

(II-1



$|z_A| = 2\sqrt{2}$

$|z_C| = 2\sqrt{2}$

$OA = OC$

المثلث OAC متساوي الساقين.

(2

$\arg z_A = \frac{\pi}{4}$ تعني $\theta_A = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ حيث $\begin{cases}\cos\theta_A = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_A = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

$\arg z_C = \pi$: تعني $\theta_C = \pi + 2k\pi$ حيث $\begin{cases}\cos\theta_C = -1 \\ \sin\theta_C = 0\end{cases}$

$\arg\left(\frac{z_C}{z_A}\right) = \arg z_C - \arg z_A = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

$(\vec{OA}; \vec{OC}) = (\vec{OA}; \vec{OI}) + (\vec{OI}; \vec{OC}) = 2(\vec{OA}; \vec{OI}) = \frac{3\pi}{4}$

(المستقيم (OI) هو منصف الزاوية (OAC)) $(\vec{OA}; \vec{OI}) = \frac{3\pi}{8}$: تعني

$(\vec{u}; \vec{OI}) = (\vec{u}; \vec{OA}) + (\vec{OA}; \vec{OI}) = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{8} = \frac{5\pi}{8}$

$\arg(z_I) = \frac{5\pi}{8}$: تعني

(3

$z_I = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{-2\sqrt{2} + 2 + 2i}{2} = -\sqrt{2} + 1 + i$

$|z_I| = \sqrt{(-\sqrt{2}+1)^2 + 1} = \sqrt{3 - 2\sqrt{2} + 1} = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$

$z_I = \sqrt{4-2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8}\right) = -\sqrt{2} + 1 + i$

$\begin{cases}\cos\frac{5\pi}{8} = \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \\ \sin\frac{5\pi}{8} = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\end{cases}$ $\begin{cases}\sqrt{4-2\sqrt{2}}\cos\frac{5\pi}{8} = -\sqrt{2}+1 \\ \sqrt{4-2\sqrt{2}}\sin\frac{5\pi}{8} = 1\end{cases}$

بعد التبسيط: $\cos\frac{5\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ و $\sin\frac{5\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

(4

$\left(\frac{-2\sqrt{2}\,z_A}{z_B \times z_C}\right)^n = \left(\frac{-4\sqrt{2}(1+i)}{-4\sqrt{2}(1-i)}\right)^n = i^n = (e^{i\frac{\pi}{2}})^n = e^{i\frac{n\pi}{2}}$

$\left(\cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2}\right)$ حقيقي يعني $\sin\frac{n\pi}{2} = 0$

$\frac{n\pi}{2} = k\pi$ حيث $(k \in \mathbb{N})$ $n = 2k$

$i^{1447} = i \cdot i^{1446} = i \times (i^2)^{723} = i(-1) = -i$

(5

$|z - z_A| = |z - z_C|$ تعني $AM = CM$

بما أن $OA = OC$ و منه O تنتمي إلى (E).

ا.مجموعة (E) هي محور [AC] أي المستقيم (OI)

تمرين 2:

(1

$P(A) = \frac{C_5^2 + C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{16}{45}$

(عكس نفس الرقم) $P(B) = 1 - \frac{C_3^2 + C_4^2 + C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{7}{9}$

$P(A \cap B) = \frac{C_5^2 \cdot C_3^1 + 1 + C_4^2 \times C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{11}{45}$ (0,1) بيضاء (0,1) سوداء (1,2) ; (0,2)

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{8}{9}$

$P_B(A) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{1}{9} \times \frac{9}{2} = \frac{1}{2}$

(2

$X = \{0; 1; 2; 3; 4\}$

(0+0) $P(X=0) = \frac{C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{15}$

(1×1) ; (0,1) $P(X=1) = \frac{C_4^2 + C_3^1 \times C_4^1}{C_{10}^2} = \frac{2}{5}$

(0+2) ; (1,2) $P(X=2) = \frac{C_4^1 \times C_2^1 + C_3^1 \times C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{14}{45}$

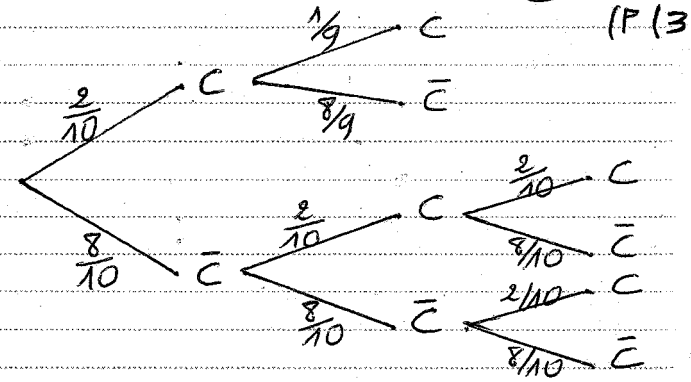
(0;3) ; (2,3) (1×3) $P(X=3) = \frac{C_3^1 \times C_1^1 + C_2^1 \times C_1^1 + C_4^1 \times C_1^1}{C_{10}^2} = \frac{1}{5}$

(2+2) $P(X=4) = \frac{C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{45}$

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{14}{45}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{45}$

$E(X) = \frac{2}{5} + \frac{28}{45} + \frac{3}{5} + \frac{4}{45} = \frac{77}{45}$

(P (3



$P(0) = 1 - P(C \cap C) = 1 - \frac{2}{10} \times \frac{1}{9} = 1 - \frac{1}{45} = \frac{44}{45}$ (ب

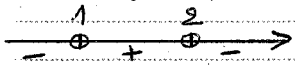
تمرين 3:

$f'(x) = 1 - \left[\ln x + \frac{x-2}{x}\right] = \frac{2 - x\ln x}{x}$ (I-1

$0 \leq x\ln x \leq 2\ln 2$; $0 \leqslant \ln x \leqslant \ln 2$; $1 \leqslant x \leqslant 2$

$0 < 2 - 2\ln 2 \leqslant 2 - x\ln x \leqslant 2$; $-2\ln 2 \leqslant -x\ln x \leqslant 0$

إذن $f'(x) > 0$ ، $1 \leqslant x \leqslant 2$ ولما f متزايدة على $[1;2]$



(2 $f(x) - x = -(x-2)\ln x$

بما أن: $\sqrt{e} \leqslant x \leqslant 2$ فإن $f(x) - x \geqslant 0$.

(I-II $u_0 = \sqrt{e}$: $n=0$ ، $\sqrt{e} \leqslant u_n \leqslant 2$ (محققة)

نفرض أن: $\sqrt{e} \leqslant u_n \leqslant 2$ ونبرهن $\sqrt{e} \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$

بما أن f متزايدة: $f(\sqrt{e}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(2)$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\sqrt{e} \leqslant u_n \leqslant 2$: تعني $\sqrt{e} \leqslant 1{,}8 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$

(2 $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geqslant 0$ (انظر I-2)

(u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة

$\lim_{+\infty} u_{n+1} = \lim_{+\infty} u_n = \ell$ ؛ $f(\ell)=\ell$ إذن $\ell - (\ell-2)\ln\ell = \ell$

$(\ell-2)\ln\ell = 0$ نجد $\ell=1$ و $\ell=2$ (مرفوض لأنها متزايدة)

3) $2-u_{n+1} = 2-u_n+(u_n-2)\ln u_n$

$2-u_{n+1} = (2-u_n)(1-\ln u_n)$

$\sqrt{e} \leq u_n \leq 2$ ؛ $\frac{1}{2} \leq \ln u_n \leq \ln 2$

$-\ln 2 \leq -\ln u_n \leq -\frac{1}{2}$ ؛ $1-\ln 2 \leq 1-\ln u_n \leq \frac{1}{2}$

نضرب في $(2-u_n)$ موجب:

$(2-u_n)(1-\ln u_n) \leq \frac{1}{2}(2-u_n)$ ومنه $2-u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(2-u_n)$

لدينا:
$2-u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(2-u_n)$
$2-u_1 \leq \frac{1}{2}(2-u_0)$
$2-u_2 \leq \frac{1}{2}(2-u_1)$
$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$
$2-u_n \leq \frac{1}{2}(2-u_{n-1})$

بالضرب طرف لطرف

$2-u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (2-u_0)$

الحدود كلها موجبة

$0 \leq \lim_{+\infty}(2-u_n) \leq \lim_{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n(2-\sqrt{e})$ بما أن $\lim_{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

$\lim_{+\infty}(2-u_n)=0$ (مبرهنة الحصر) إذن $\lim_{+\infty} u_n = 2$

تمرين 4:

I- 1) معامل توجيه المماس $g'(0) = \frac{2-0}{1-0} = 2$

2) إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

$g'(x) = 3ae^{3x} + b(2x+1)e^{2x}$

$\begin{cases} a+c=0 \\ 3a+b=2 \\ 0+c=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} g(0)=0 \\ g'(0)=2 \\ \lim_{-\infty} g(x) = -1 \end{cases}$

$c=-1$ ، $a=-c$ ، $a=1$ ، $b=-1$

II- 1) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = e^{-x}\left(\underbrace{xe^x}_{0} + 1 + \frac{\overbrace{xe^x}^{0} + \overbrace{2e^x}^{0}}{e^x+1}\right) + \infty$

$\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty}\left[x + \underbrace{e^{-x}}_{0} + \underbrace{\left(\frac{x}{e^x}\right)}_{0}\left(\frac{1+2/x}{1+1/e^x}\right)\right] = +\infty$

2) $f'(x) = 1 - e^{-x} + \frac{e^x+1-e^x(x+2)}{(e^x+1)^2}$

$f'(x) = \frac{(1-e^{-x})(e^x+1)^2 + 1 - e^x(x+1)}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x} - xe^x - e^{-x}}{(e^x+1)^2}$

$f'(x) = \frac{e^{3x} - xe^{2x} - 1}{e^x(e^x+1)^2} = \frac{g(x)}{e^x(e^x+1)^2}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

3) $\lim_{+\infty}(f(x)-x) = \lim_{+\infty}\left[\underbrace{e^{-x}}_{0} + \underbrace{\left(\frac{x}{e^x}\right)}_{0}\left(\frac{1+2/x}{1+1/e^x}\right)\right] = 0$

ومنه: $(\Delta): y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$

ب) لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $e^x > x$ ومنه $e^{-x} > -x$

يمكن دراسة تغيرات $h(x) = e^{-x} + x$ حيث $h'(x) = 1 - e^{-x}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
h		↘	1	↗	

ومنه $h(x) > 0$

الوضعية: $f(x) - x = e^{-x} + \frac{x+2}{e^x+1} = \frac{e^{-x}+x+3}{e^x+1}$

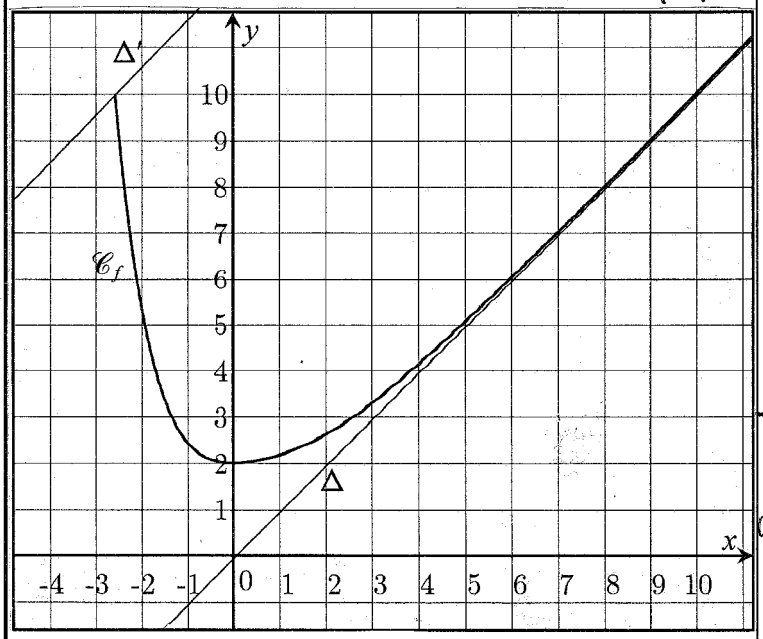
بما أن $e^{-x}+x > 0$ ومنه $f(x)-x > 0$ فوق (C_f)

4) f مستمرة ومتناقصة تماما على $]-\infty;0]$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة $f(x)=10$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-3 < \alpha < -2$ لأن $f(-3) > 10$ و $f(-2) < 10$

ب) $(\Delta'): y = x+b$ و يشمل $B(\alpha; 10)$

$10 = \alpha + b$ ومنه $b = 10-\alpha$ إذن $(\Delta'): y = x+10-\alpha$

5) أ) الرسم:



ب) حلول المعادلة: $f(x) = x+m$ هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيمات الموازية لـ (Δ)،

$m \leq 0$: لا يوجد حلول.

$0 < m < 2$: حل وحيد موجب.

$m = 2$: المعادلة تقبل حلا معدوما.

$2 < m \leq 10-\alpha$: المعادلة تقبل حلا سالبا.

$m > 10-\alpha$: المعادلة لا تقبل حلول.

6) $A = \int_0^1 (f(x)-x)\,dx = \int_0^1 \left(e^{-x} + \frac{x+2}{e^x+1}\right)dx$

لدينا: $0 \leq \frac{x+2}{e^x+1} \leq 1$

$e^{-x} \leq e^{-x} + \frac{x+2}{e^x+1} \leq e^{-x} + 1$

$\int_0^1 e^{-x}\,dx \leq \int_0^1 \left(e^{-x} + \frac{x+2}{e^x+1}\right)dx \leq \int_0^1 (e^{-x}+1)\,dx$

$\left[-e^{-x}\right]_0^1 \leq A \leq \left[-e^{-x}+x\right]_0^1$

$1 - e^{-1} \leq A \leq 2 - e^{-1}$ u.a

$4(1-e^{-1}) \leq A \leq 4(2-e^{-1})$ cm²

عبد العليم