



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين :

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

قسم للثالثة تقني رياضي به 18 تلميذا موزعين على أربع تخصصات كما يلي: 6 تلاميذ هندسة كهربائية منهم 4 ذكور ، 5 تلاميذ هندسة ميكانيكية منهم 3 ذكور ، 4 تلاميذ هندسة مدنية كلهم ذكور و 3 تلاميذ هندسة الطرائق كلهم إناث .
I/ نريد تشكيل لجنة تضم 4 تلاميذ من هذا القسم بطريقة عشوائية .

(1) احسب احتمال كل من الحدثين التاليين :

A " اللجنة تضم تلاميذا من نفس التخصص " B " تلاميذ اللجنة من نفس الجنس "

(2) بين أن $P(A \cap B) = \frac{1}{1530}$ ، واستنتج احتمال أن تضم اللجنة تلاميذا من نفس التخصص أو من نفس الجنس .

II/ نريد الآن وبطريقة عشوائية تعيين تلميذين من هذا القسم أحدهم رئيس والآخر نائب .

نعتبر X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل لجنة عدد تلاميذ الهندسة الكهربائية فيها .

(1) برر أن القيم الممكنة لـ X هي $\{0;1;2\}$ ثم عرف قانون احتمال X .

(2) احسب $E(X)$ الأمل الرياضي لـ X ثم عين قيمة العدد الحقيقي α بحيث يكون : $E(2025X + \alpha) = 2024$

التمرين الثاني : (05 نقاط)

(1) أ) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 3^n على 13 .

ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد 1446^{1962} على 13 .

(2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $7 \times 2025^{6n} - 3 \times 1446^{2026} + 1302 \equiv 0 \pmod{13}$.

(3) عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق : $n^2 + 29^{3n+1} \times 2n + 1446^{3n+2} \equiv 0 \pmod{13}$.

(4) ليكن العدد الطبيعي N الذي يكتب $\overline{\alpha 612}$ في نظام التعداد ذو الأساس 7 ويكتب $\overline{\beta \beta 0 \beta \beta 0 2}$ في نظام التعداد ذو الأساس 3 .

- عين قيمة كل من α و β ثم أكتب العدد $7 + N$ في النظام العشري .

(5) أ) حل العدد 2025 إلى جداء عوامل أولية ثم إستنتج قيم العدد الطبيعي n التي تحقق : $2025 \equiv 0 \pmod{n^3}$

ب) جد العددين الطبيعيين a و b حيث : $m^3 + 11d^3 = 2025$ حيث $d = PGCD(a; b)$ و $m = PPCM(a; b)$

التمرين الثالث : (04 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحددها الأول $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.
 (1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n \leq 2$.

ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}^2 - u_n^2 = u_n(2 - u_n)$ ثم استنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة ومتقاربة
 (2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \ln 2 - \ln u_n$

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدها الأول .

ب) عبر عن v_n بدلالة n ثم بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n $u_n = \frac{2}{2^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}}$ ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$ ، $T_n = \frac{v_0}{\ln 2} C_n^0 + \frac{v_1}{\ln 2} C_n^1 + \dots + \frac{v_n}{\ln 2} C_n^n$ ، احسب كلا من S_n و T_n بدلالة n .

التمرين الرابع : (07 نقاط)

(I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (2x+1)e^x - 1$

(1) ادرس إتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(2) احسب $g(0)$ ، ثم إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x(e^x - 1)^2$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(2) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو معادلة $y = x$ مقاربا مائلا للمنحني (C_f) عند $-\infty$.

ب) ادرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

(3) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = (e^x - 1)g(x)$.

ب) استنتج إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(4) بين أن المنحني (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثيها .

(5) اكتب معادلة (T) مماس للمنحني عند النقطة ذات الفاصلة x_0 والمار من مبدأ المعلم .

(6) انشيء كل من (Δ) ، (T) والمنحني (C_f) .

(7) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x) = mx$.

(8) أ) تحقق أن : $H : x \mapsto 2(x-1)e^x + \frac{1}{4}(1-2x)e^{2x}$ دالة أصلية للدالة : $h : x \mapsto x - f(x)$ على $\mathbb{R}$.

ب) احسب : $\int_0^{\ln 2} h(x)dx$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا . انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

عين الإقتراح الصحيح الوحيد من بين الإقتراحات التالية مع التبرير:

(1) الجذران التربيعيان للعدد المركب i هما:

(أ) $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ و $-\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ (ب) $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ و $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ (ج) $1+i$ و $1-i$

(2) العدد المركب $\left(\frac{-4-3i}{3-4i}\right)^{2025}$ يساوي :

(أ) i (ب) $-i$ (ج) 1

(3) z عدد مركب حيث $z = 3\sqrt{2}(1+i)$ ، الشكل الأسّي للعدد المركب $(1+i)z$ هو :

(أ) $z = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ (ب) $z = 6e^{i\frac{\pi}{4}}$ (ج) $z = 6\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

(4) عمدة للعدد المركب z عدد حيث $z = -3\left(-\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}\right)$ هي :

(أ) $\frac{\pi}{7}$ (ب) $-\frac{\pi}{7}$ (ج) $\pi - \frac{\pi}{7}$

(5) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث $|2z - 2 + 4i| = 8$ هي دائرة مركزها A ونصف قطرها r بحيث :

(أ) $A(-2;4)$ $r = 8$ (ب) $A(1;-2)$ $r = 4$ (ج) $A(-2;4)$ $r = 3$

التمرين الثاني : (04 نقاط)

(1) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 5^n على 9

(2) بين أن العدد $1446 + 2 \times 1954^{1962} + 1948^{2025}$ مضاعف للعدد 9

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = 1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n$

(أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4S_n = 5^{n+1} - 1$

(ب) عين باقي قسمة S_{2025} على 9

(ج) حدد قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $S_n \equiv 0[9]$

(4) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $5^n x - S_n y = 9$ (E) .

(أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، 5^n و S_n أوليان فيما بينهما .

(ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) .

التمرين الثالث : (04 نقاط)

يحتوي صندوق على أربع كريات حمراء تحمل الأرقام -1 ، -1 ، 0 ، 1 وكريتين خضراوين تحملان الرقمين -1 ، 0 وكرية سوداء تحمل الرقم 1 الكريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس .

(I) نسحب عشوائيا كريتين في آن واحد

(1) احسب احتمال الحدثين التاليين : A : الكريتين من نفس اللون ، B : جداء الرقمين الظاهرين معدوم .
- احسب $P(A \cap B)$.

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب العدد $e^{|a-b|}$ حيث a و b الرقمين المسجلين على الكريتين .
- عين قيم المتغير العشوائي X ، ثم عرف قانون احتماله .

(II) نعيد الكريات المسحوبة للصندوق ونضيف له n ($n \geq 1$) كرية تحمل الرقم 1

ثم نسحب عشوائيا كريتين على التوالي دون إرجاع

- بين أن احتمال سحب رقمين مختلفين تماما في الإشارة يساوي $\frac{6n+12}{n^2+13n+42}$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = x + (1-2x)\ln x$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(I) 1 - احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، وفسر النتيجة بيانيا . - احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = -2\ln x + \frac{1-x}{x}$.

(3) بين أن الدالة f متزايدة تماما على $]0; 1[$ ومتناقصة تماما على $[1; +\infty[$. ثم شكل جدول تغيراتها

(4) ادرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$.

(5) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث : $0,33 < \alpha < 0,34$ و $1,95 < \beta < 1,96$

(6) ارسم (Δ) و (C_f) .

(7) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m الموجب تماما عدد حلول المعادلة : $me^{2x \ln x} = xe^x$

(II) نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ : $h(x) = x + 1 + (-1-2x)\ln(x+1)$ و (C_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق .

- بين كيف يمكن إنشاء (C_h) انطلاقا من (C_f) . (الإنشاء غير مطلوب)

(III) بتوظيف المكاملة بالتجزئة أحسب التكامل I حيث : $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 (1-2x)\ln x dx$ ثم فسر النتيجة بيانيا .

انتهى الموضوع الثاني

الإجابة مفصلة و سلم التنقيط - الموضوع الاول

الشعبة : تقني رياضي

المستوى : الثالثة ثانوي

اختبار مادة : الرياضيات

العلامة		عناصر الإجابة	محاو الموضوع								
المجموع	مجزة		الإحتمالات								
4		التمرين الاول: (I) عدد الحالات الممكنة : $card\Omega = C_{18}^4 = 3060$ (1) احتمال أن تضم اللجنة تلاميذ من نفس التخصص : $P(A) = \frac{C_6^4 + C_5^4 + C_4^4}{C_{18}^4} = \frac{7}{1020}$ احتمال أن تضم اللجنة تلاميذ من نفس الجنس : $P(B) = \frac{C_{11}^4 + C_7^4}{C_{18}^4} = \frac{63}{612}$ (2) تبين أن $P(A \cap B) = \frac{1}{1530}$: $P(A \cap B) = \frac{C_4^4 + C_4^4}{C_{18}^4} = \frac{1}{1530}$ استنتاج احتمال أن تضم اللجنة تلاميذا من نفس التخصص أو من نفس الجنس: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{7}{1020} + \frac{73}{612} - \frac{1}{1530} = \frac{32}{255}$ (II) (1) التبرير : $X = 0$: اللجنة لا تضم أي تلميذ من تلاميذ ه.ك $X = 1$: اللجنة تضم تلميذا واحدا من تلاميذ ه.ك $X = 2$: اللجنة تضم تلميذين من تلاميذ ه.ك تعريف قانون إحتمال المتغير العشوائي X : $P(X=1) = \frac{A_6^1 \times A_{12}^1 \times 2}{A_{18}^2} = \frac{144}{306} = \frac{8}{17} , P(X=0) = \frac{A_{12}^2}{A_{18}^2} = \frac{132}{306} = \frac{22}{51}$ $P(X=2) = \frac{A_6^2}{A_{18}^2} = \frac{30}{306} = \frac{5}{51}$ ومنه فان قانون احتمال X يتلخص في الجدول التالي: <table border="1"> <tr> <td>x_i</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr> <td>$P(X = x_i)$</td><td>$\frac{22}{51}$</td><td>$\frac{8}{17} = \frac{24}{51}$</td><td>$\frac{5}{51}$</td></tr> </table> (2) حساب الأمل الرياضي: $E(X) = \sum_{i=1}^3 x_i p(X = x_i) = 0 \times \frac{22}{51} + 1 \times \frac{24}{51} + 2 \times \frac{5}{51} = \frac{2}{3}$ تعين قيمة α : $E(2025X + \alpha) = 2024$ معناه $2025E(X) + \alpha = 2024$ معناه $\alpha = 2024 - 2025E(X)$. $\alpha = 674$ معناه	x_i	0	1	2	$P(X = x_i)$	$\frac{22}{51}$	$\frac{8}{17} = \frac{24}{51}$	$\frac{5}{51}$	
x_i	0	1	2								
$P(X = x_i)$	$\frac{22}{51}$	$\frac{8}{17} = \frac{24}{51}$	$\frac{5}{51}$								

(1) أ) الدراسة تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 3^n على 13 :
لدينا : $3^0 \equiv 1[13]$ ، $3^1 \equiv 3[13]$ ، $3^2 \equiv 9[13]$ ، $3^3 \equiv 1[13]$ إذن بواقي القسمة دورية ودورها 3 :

$n =$	$3k$	$3k + 1$	$3k + 2$
$3^n \equiv$	1	3	9

لدينا : $1446 \equiv 3[13]$ و $1962 = 3(654)$ ومنه $1446^{1962} \equiv 1[13]$
أي $(1446^{1962})^{2025} \equiv 1[13]$
(2) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : العدد $7 \times 2025^{6n} - 3 \times 1446^{2026} + 1302$ مضاعف لـ 13 :

لدينا $2025 \equiv 10[13]$ و $10 \equiv -3[13]$ ومنه $2025 \equiv -3[13]$
اذن $2025^{6n} \equiv ((-3)^2)^{3n} \equiv ((-3)^2)^{3n} [13]$ ومنه $2025^{6n} \equiv ((3)^2)^{3n} [13]$
وعليه $2025^{6n} \equiv 1[13]$ (1)
ولدينا $1446 \equiv 3[13]$ و $1446 = 3(675) + 1$ و $2026 = 3(675) + 1$
وعليه $1446^{2026} \equiv 3[13]$ (2)
ولدينا $1302 \equiv 2[13]$ (3)
من (1) و (2) و (3) نجد : $7 \times 2025^{6n} - 3 \times 1446^{2026} + 1302 \equiv 7 - 9 + 2[13]$
أي $7 \times 2025^{6n} - 3 \times 1446^{2026} + 1302 \equiv 0[13]$
(3) تعيين الأعداد الطبيعية n التي تحقق : $n^2 + 29^{3n+1} \times 2n + 1446^{3n+2} \equiv 0[13]$
لدينا $n^2 + 29^{3n+1} \times 2n + 1446^{3n+2} \equiv n^2 + 6n + 9[13]$ ومنه $n^2 + 6n + 9 \equiv 0[13]$
أي $(n+3)^2 \equiv 0[13]$ وبما أن 13 عدد أولي اذن $n+3 \equiv 0[13]$ أي $n \equiv -3[13]$ أي $n \equiv 10[13]$ ومنه $n = 13\alpha + 10$ حيث $\alpha \in \mathbb{N}$.
(4)

$$\begin{cases} N = 2 \times 7^0 + 1 \times 7^1 + 6 \times 7^2 + \alpha \times 7^3 \\ N = 2 \times 3^0 + \beta \times 3^2 + \beta \times 3^3 + \beta \times 3^5 + \beta \times 3^6 \\ 1 \leq \alpha \leq 6 ; 1 \leq \beta \leq 2 \end{cases} \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases} N = \overline{\alpha 612}^7 \\ N = \overline{\beta \beta 0 \beta \beta 0 2}^3 \\ 1 \leq \alpha \leq 6 ; 1 \leq \beta \leq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 343\alpha = 1008\beta - 301 \\ 1 \leq \alpha \leq 6 ; 1 \leq \beta \leq 2 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} N = 303 + 343\alpha \\ N = 1008\beta + 2 \\ 1 \leq \alpha \leq 6 ; 1 \leq \beta \leq 2 \end{cases} \quad \text{ومنه}$$

• من أجل $\beta = 1$ لدينا $\alpha = \frac{707}{343} \notin \mathbb{N}$ مرفوض

• من أجل $\beta = 2$ فإن : $\alpha = 5$ ومنه $(\alpha; \beta) = (5; 2)$.

• $N = 1008(2) + 2 = 2018$ ومنه $N + 7 = 2025$.

(5) أ) تحليل 2025 إلى جداء عوامل أولية :

$$\begin{array}{r|l}
 2025 & 3 \\
 675 & 3 \\
 225 & 3 \\
 75 & 3 \\
 25 & 5 \\
 5 & 5 \\
 1 &
 \end{array}$$

أي $2025 = 3^4 \times 5^2$

استنتاج قيم n حيث : $2025 \equiv 0 [n^3]$ معناه $2025 \setminus n^3$ ومنه $n=1$ او $n=3$ اذن $n \in \{1;3\}$.

ب) تعيين الثنائيات الطبيعية (a;b) حيث :

$$\begin{cases} m^3 + 11d^3 = 2025 \\ m = PPCM(a;b) \\ d = PGCD(a;b) \end{cases} \dots\dots\dots(1)$$

لدينا :

$$\begin{cases} a \times b = md \\ a = a'd \\ b = b'd \\ a' \wedge b' = 1 \end{cases} \dots\dots\dots(2)$$

نعوض (2) في (1) نجد : $(a'b'd)^3 + 11d^3 = 2025$ ومنه $d^3((a'b')^3 + 11) = 2025$ ومنه $d^3 \setminus 2025$ ومنه $d=1$ او $d=3$ من أجل $d=1$ نجد $(a'b')^3 = 2014$ وهو مرفوض . من أجل $d=3$ نجد $(a'b')^3 = 64$ ومنه

$$\begin{cases} a' \times b' = 4 \\ a' \wedge b' = 1 \end{cases}$$

a'	1	4
b'	4	1
a	3	12
b	12	3

اذن $(a;b) = \{(3;12), (12;3)\}$

(1) أ) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 0 < u_n \leq 2$:

نضع : $0 < u_n \leq 2 : P(n)$ لدينا $0 < u_0 = 1 \leq 2$ اذن $P(0)$ صحيحة .

نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل عدد طبيعي كفي n أي $0 < u_n \leq 2$ ومنه

$$0 < 2u_n \leq 4 \text{ ومنه } 0 < \sqrt{2u_n} \leq 2 \text{ أي } 0 < u_{n+1} \leq 2 \text{ ومنه } P(n+1) \text{ صحيحة اذن}$$

$P(n)$ وراثية وعليه نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 0 < u_n \leq 2$.

ب) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1}^2 - u_n^2 = u_n(2 - u_n)$:

$$u_{n+1}^2 - u_n^2 = \sqrt{2u_n}^2 - u_n^2 = 2u_n - u_n^2 = u_n(2 - u_n) \text{ وهو المطلوب .}$$

لدينا $u_{n+1}^2 - u_n^2 = u_n(2 - u_n)$ ومنه $(u_{n+1} + u_n)(u_{n+1} - u_n) = u_n(2 - u_n)$ ومنه

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(2 - u_n)}{u_{n+1} + u_n} \text{ بما أنه من أجل كل عدد طبيعي } n : 0 < u_n \leq 2 \text{ نستنتج}$$

أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} - u_n \geq 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة .

لدينا المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 2 ومتزايدة وبالتالي فهي مقاربة .

(2) أ) تبيان أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و تعيين حدها الأول :

$$\text{لدينا } v_n = \ln 2 - \ln u_n \text{ ومنه}$$

$$v_{n+1} = \ln 2 - \ln u_{n+1} = \ln 2 - \ln \sqrt{2u_n} = \ln 2 - \frac{1}{2} \ln(2u_n)$$

$$= \ln 2 - \frac{1}{2} \ln(2) - \frac{1}{2} \ln(u_n) = \frac{1}{2} \ln(2) - \frac{1}{2} \ln(u_n) = \frac{1}{2} (\ln(2) - \ln(u_n)) = \frac{1}{2} v_n$$

اذن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول : $v_0 = \ln 2 - \ln u_0 = \ln 2$:

$$\text{ب) التعبير عن } v_n \text{ بدلالة } n : v_n = v_0 q^n = \ln 2 \left(\frac{1}{2} \right)^n = \frac{\ln 2}{2^n}$$

تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n = \frac{2}{2^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}}$ لدينا $v_n = \ln 2 - \ln u_n$ ومنه

$$\ln u_n = \ln 2 - v_n \text{ ومنه}$$

$$u_n = e^{\ln 2 - v_n} = e^{\ln 2} e^{-v_n} = 2e^{-\frac{\ln 2}{2^n}} = 2 \left(e^{\ln 2} \right)^{-\frac{1}{2^n}} = 2 \times 2^{-\frac{1}{2^n}} = \frac{2}{2^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}}$$

$$\text{حساب } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{2^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{2^{\frac{1}{2^n}}} = 2 : \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

(3) حساب كل من S_n و T_n بدلالة n : لدينا

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = v_0 \frac{1 - q^n}{1 - q} = \ln 2 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \ln 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right)$$

$$T_n = \frac{v_0}{\ln 2} C_n^0 + \frac{v_1}{\ln 2} C_n^1 + \dots + \frac{v_n}{\ln 2} C_n^n = \frac{\ln 2}{\ln 2} C_n^0 + \frac{\ln 2}{\ln 2} C_n^1 + \dots + \frac{\ln 2}{\ln 2} C_n^n$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^0 C_n^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 C_n^1 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n C_n^n = C_n^0 1^{n-0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 + C_n^1 1^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \dots + C_n^n 1^{n-n} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

7ن

التمرين الرابع

الدوال
العديدية

(I) لدينا : $g'(x) = (2x+3)e^x$ وشارتها من نفس إشارة $2x+3$

جدول الإشارة :

x	$-\infty$	$-3/2$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$

اذن الدالة g متزايدة تماما على المجال $\left[-\frac{3}{2}; +\infty\right]$ ومتناقصة تماما على $\left]-\infty; -\frac{3}{2}\right]$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$-3/2$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	-1	$-2e^{-3/2} - 1$	$+\infty$

(2) $g(0) = 0$ من خلال جدول التغيرات السابق نستنتج أن إشارة $g(x)$ تكون :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II) (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

(2) أ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x(e^x - 2)^2 - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [xe^{2x} - 2xe^x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [xe^x(e^x - 2)] = 0$

ومنه $y = x$: (Δ) مقاربا لـ (C_f) عند $-\infty$.

ب) من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f(x) - x = xe^x(e^x - 2)$ ومنه $f(x) - x = 0$ تعني

$x = 0$ او $x = \ln 2$ ومنه يكون الوضع النسبي مبين في الجدول التالي :

x	$-\infty$	0	$\ln 2$	$+\infty$
xe^x	$-$	0	$+$	$+$
$e^x - 2$	$-$	$+$	0	$+$
$f(x) - y$	$+$	0	0	$+$
الوضع النسبي	(Δ) تحت (C_f)		(Δ) فوق (C_f)	(Δ) تحت (C_f)

(3) أ) من أجل كل $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = (e^x - 1)^2 + 2xe^x(e^x - 1) = (e^x - 1) + (e^x - 1 + 2xe^x) = (e^x - 1)g(x)$$

ب) إشارة $f'(x)$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+
$e^x - 1$	-		+
$f'(x)$	+	0	+

ومنه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		0	+
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

(4) من خلال جدول التغيرات السابق لدينا المشتقة الأولى تنعدم عند 0 وتحافظ على إشارتها

وهذا يعني ان المنحني (C_f) يقبل نقطة إنعطاف هي مبدأ المعلم $O(0;0)$.

(5) (T) معادلته من الشكل $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ ولدينا (T) يمر من المبدأ

معناه : $f'(x_0)(0 - x_0) + f(x_0) = 0$ أي $-x_0(e^{x_0} - 1)g(x_0) + x_0(e^{x_0} - 1)^2 = 0$ تكافيء

$x_0(e^{x_0} - 1)[-g(x_0) + x_0(e^{x_0} - 1)] = 0$ ومنه $x_0(e^{x_0} - 1)[-(-2x_0 + 1)e^{x_0} + 1 + e^{x_0} - 1] = 0$ وعليه

$x_0(e^{x_0} - 1)(-2x_0e^{x_0}) = 0$ وعليه $x_0 = 0$ ومنه $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ وبالتالي $(T): y = 0$

(6) انشاء (Δ) ، (T) و (C_f) :

(7) حلول المعادلة $f(x) = mx$ هي فواصل نقط

تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات :

$y = mx$: (Δ_m) وهذه المستقيمات كلها تدور

حول مبدأ المعلم وعليه : من أجل $m=1$

فان (Δ_m) ينطبق على (Δ) ومن أجل $m=0$

فإن (Δ_m) ينطبق على حامل محور الفواصل .

- المناقشة :

• $M < 0$ المعادلة تقبل حلا وحيدا . * $0 < m < 1$ المعادلة تقبل ثلاث حلول .

• من أجل $m \geq 1$ المعادلة تقبل حلين .

(8) أ) الدالة H قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$: $H'(x) = 2e^x + 2(x-1)e^x + \frac{1}{4} \times 2e^{2x}(1-2x) - 2 \times \frac{1}{4}e^{2x}$ أي

$$H'(x) = 2e^x - xe^{2x} \text{ ومنه } H'(x) = 2e^x + 2xe^x - 2e^x - \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{2x} - xe^{2x}$$

$$H'(x) = x - f(x) = h(x) \text{ اذن } H'(x) = xe^x(2 - e^x) = -xe^x(e^x - 2) = -[f(x) - x]$$

$$S = \int_0^{\ln 2} h(x)dx = [H(x)]_0^{\ln 2} = H(\ln 2) - H(0) = \ln 4 - \frac{5}{4} \text{ ب) وهي قيمة مساحة الحيز}$$

المستوي المحدد (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمات ذات المعادلات $x = \ln 2$ و $x = 0$.