الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية بولاية تمنراست – ثانوية الشيخ أمود — العام الدراسي: 2023 / 2024

المستوى : الثالثة رياضيات — المـــــــــدة : أربع ساعات

الاختبار الثاني في مادة الرياضيات

التمرين ألأول (04 نقاط) :

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ و $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\dfrac{4}{4-u_n}$

1. أ-برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n<2$

ب-أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة

ج-إذا كان $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$ فبين أن l يحقق $(l-2)^2=0$ ثم عين قيمته

2. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $v_n=\dfrac{1}{u_n-2}$

أ - بين أن (v_n) متتالية حسابية أساسها $-\dfrac{1}{2}$ يطلب تعيين حدها الأول

ب -أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

3. نضع $S_n=\dfrac{1}{e^{2v_0}}+\dfrac{1}{e^{2v_1}}+...\dfrac{1}{e^{2v_n}}$ أوجد المجموع S_n بدلالة n

التمرين الثاني (04 نقاط) :

ليكن العدد الطبيعي n

1. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 5^n على 11
2. عين باقي قسمة العدد 2007^{22} على 11
3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $a=2n+5$ و $b=n-3$

أ - بين أن كل قاسم مشترك للعددين $a\,;b$ هو قاسم للعدد 11

ب -عين حسب قيم العدد الطبيعي n العدد $PGCD(b\,;a)$

ج - أستنتج $PGCD\left(2007^{22}-3\,;2\times2007^{22}+5\right)$

4. نضع $n\geq4$: و لتكن المعادلة $(E).....x^2+9=2^n$ نفرض أنها تقبل حل نرمز له بالرمز α

أ - بين أن $\alpha\equiv1[2]$

ب -أستنتج أن $\alpha^2+9\equiv2[4]$

ج - بين أن المعادلة (E) لا تقبل حلول في $\mathbb{Z}$.

التمرين الثالث (05 نقاط) :

I - (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ $u_n=\int_{-1}^{1}\left(\frac{2|x|}{3}+\frac{e^{-2n|x|}}{3}\right)dx$.

1. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_n>0$

2. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n=2\int_{0}^{1}\left(\frac{2x}{3}+\frac{e^{-2nx}}{3}\right)dx$

3. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}\int_{0}^{1}\left(1-e^{2x}\right).e^{-2(n+1)x}\,dx$

4. أستنتج إشارة $u_{n+1}-u_n$ ثم أستنتج أن المتتالية متقاربة

5. أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n ثم أحسب نهاية المتتالية (u_n)

II - نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $v_n=2n.u_n$

و المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $w_n=v_n-\frac{4n}{3}-\frac{2}{3}$

1. أكتب كل من u_n و w_n بدلالة n

2. بين أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول . لاى

3. نضع $S_n=w_1+w_2+w_3+...+w_n$ و $S_n'=v_1+v_2+v_3+...+v_n$ و أحسب المجموعين كل من بدلالة n

التمرين الرابع (07 نقاط) :

I - g دالة عددية معرفة على $]0;+\infty[$ بـ $g(x)=x-1-\ln(x)$

1. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} g(x)$ ثم ادرس اتجاه تغيرات الدالة g و شكل جدول تغيراتها .

2. استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

3. أستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x : $\ln\left(\frac{x}{2}\right)\le\frac{x}{2}-1$

II - f دالة عددية معرفة على $[0;+\infty[$ بـ $\begin{cases} f(x)=-x^2+2+2x\ln(x) & :x>0 \\ f(0)=2 \end{cases}$

و (C_f) تمثيلها بياني في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$

1. أ- أحسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ ماذا تستنتج ؟

ب- بين أن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)-2}{x}=-\infty$ ماذا تستنتج ؟ فسر النتيجة بيانياً .

ج-أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2. أ-بين انه من أجل كل عدد حقيقي موجب x : $f'(x)=-2g(x)$

ب- أدرس إشارة $f'(x)$ على $]0;+\infty[$ ثم أستنتج اتجاه تغيرات الدالة f مستنتجاً أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف $A(1;1)$.

ج- أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 2

د- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماماً x : $f(x)+2(1-\ln 2)x-2=2x\left[-\frac{x}{2}+1+\ln\left(\frac{x}{2}\right)\right]$ ثم أستنتج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

3. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $2,7<\alpha<2,8$ ثم أنشئ (Δ) و (C_f)

4. h دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$: $\begin{cases} h(x)=-x^2+2+2|x|\ln(|x|): x\neq 0 \\ h(0)=2 \end{cases}$

و (C) تمثيلها بياني في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$

أ - بين أن h دالة زوجية

ب -أنشئ (C_h) انطلاقا من (C_f) في نفس المعلم السابق.

الأستاذ جواليل أحمد – بالتوفيق و النجاح في بكالوريا 2024

التمرين الأول (04 نقاط) :

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ و $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\dfrac{4}{4-u_n}$

1. أ-البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n<2$:

$u_0<2$ محققة

نفرض أن $u_n<2$ و لنبرهن أن $u_{n+1}<2$

$u_n<2$ بالضرب في -1 نجد $-u_n>-2$ بإضافة 4 نجد $4-u_n>2$ بالقلب $\dfrac{4}{4-u_n}<\dfrac{1}{2}$ بالضرب في 4 نجد

$\dfrac{4}{4-u_n}<2$ أي أن $u_{n+1}<2$

و منه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n<2$

ب-دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n): نحسب الفرق $u_{n+1}-u_n=\dfrac{4}{4-u_n}-u_n=\dfrac{4-4u_n+u_n^2}{4-u_n}=\dfrac{(2-u_n)^2}{4-u_n}$

بما أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n<2$ نستنتج أن الفرق عدد موجب و منه المتتالية (u_n) متزايدة

استنتاج أنها متقاربة : (u_n) متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى فهي متقاربة .

ج-إذا كان $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$ فبين أن l يحقق $(l-2)^2=0$: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$ و $u_{n+1}=\dfrac{4}{4-u_n}$ و $u_n<2$ يعني أن

$l=\dfrac{4}{4-l}$ أي ان $4l-l^2=4$ و منه $l^2-4l+4=0$ أي أن $(l-2)^2=0$

تعيين قيمة l : $(l-2)^2=0$ يعني أن $l=2$

2. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $v_n=\dfrac{1}{u_n-2}$:

ج - إثبات أن (v_n) متتالية حسابية أساسها $-\dfrac{1}{2}$ يطلب تعيين حدها الأول :

$v_{n+1}=\dfrac{1}{u_{n+1}-2}=\dfrac{1}{\dfrac{4}{4-u_n}-2}=\dfrac{4-u_n}{4-8+2u_n}=\dfrac{4-u_n}{-4+2u_n}$ و منه

$v_{n+1}-v_n==\dfrac{4-u_n}{-4+2u_n}-\dfrac{1}{u_n-2}=\dfrac{4-u_n-2}{2u_n-4}=\dfrac{-(u_n-2)}{2(u_n-2)}=-\dfrac{1}{2}$ و منه (v_n) متتالية حسابية أساسها $-\dfrac{1}{2}$ و

حدها الأول $v_0=\dfrac{1}{u_0-2}=-1$

د - كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n : $v_n=-1-\dfrac{1}{2}.n$

لدينا $v_n=\dfrac{1}{u_n-2}$ و منه $u_n-2=\dfrac{1}{v_n}$ أي أن $u_n=2+\dfrac{1}{v_n}$ أي $u_n=2+\dfrac{1}{-\frac{1}{2}n-1}$ إذن $u_n=\dfrac{-n-1}{-\frac{1}{2}n-1}$ و منه

$$u_n=\frac{2n+2}{n+2}$$

3. نضع $S_n=\dfrac{1}{e^{2v_0}}+\dfrac{1}{e^{2v_1}}+...\dfrac{1}{e^{2v_n}}$ حساب المجموع S_n بدلالة n :

$\dfrac{1}{e^{2v_n}}=\dfrac{1}{e^{2\left(-\frac{1}{2}n-1\right)}}=e^{n+2}$ و هي متتالية هندسية أساسها e و منه $S_n=\dfrac{1}{e^{2v_0}}\left[\dfrac{1-e^{n+1}}{1-e}\right]=e^2\left[\dfrac{1-e^{n+1}}{1-e}\right]$

التمرين الثاني (04 نقاط) :

ليكن العدد الطبيعي n

1. الدراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 5^n على 11 :

$n=$	$5k$	$5k+1$	$5k+2$	$5k+3$	$5k+4$	$k\in\mathbb{N}$
$5^n\equiv$	1	5	3	4	9	$[11]$

2. تعيين باقي قسمة العدد 2007^{22} على 11 : $2007\equiv 5[11]$ يكافئ $2007^{22}\equiv 5^{22}[11]$ و $22=2\times 5+2$ حسب الجدول السابق نستنتج أن $2007^{22}\equiv 3[11]$

3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $a=2n+5$ و $b=n-3$

أ - اثبات أن كل قاسم مشترك للعددين $a\,;b$ هو قاسم للعدد 11 : لدينا $a-2b=2n+5-2(n-3)=11$

أذا كان d قاسم مشترك للعددين $a\,;b$ فهو قاسم للعدد 11 .

ب -تعيين حسب قيم العدد الطبيعي n العدد $PGCD(b;a)$:

لما $PGCD(b;a)=11$ يعني أن $\begin{cases}2n+5\equiv 0[11]\\ n-3\equiv 0[11]\end{cases}$ بالطرح نجد $n+8\equiv 0[11]$ يكافئ $n\equiv -8[11]$ يعني أن $n\equiv 3[11]$ أي $n=11k+3$ و k عدد طبيعي .

لما $PGCD(b;a)=1$ يعني أن $n\neq 11k+3$ و k عدد طبيعي .

ج - استنتاج $PGCD\left(2007^{22}-3;2\times 2007^{22}+5\right)$:

لما نضع $n=2007^{22}$ نجد $a=2\times 2007^{22}+5$ و $b=2007^{22}-3$

بما أن $2007^{22}\equiv 3[11]$ يعني أن $2007^{22}=11k'+3$ و k' عدد طبيعي و منه $PGCD\left(2007^{22}-3;2\times 2007^{22}+5\right)=11$

4. نضع $n\geq 4$: و لتكن المعادلة (E).....$x^2+9=2^n$ نفرض أنها تقبل حل نرمز له بالرمز α

أ - إثبات أن $\alpha\equiv 1[2]$: $\alpha^2+9=2^n$ يعني أن $\alpha^2+9\equiv 0[2]$ أي أن $\alpha^2\equiv -9[2]$ أي $\alpha^2\equiv 1[2]$ يكافئ أن $\alpha\equiv 1[2]$

ب -استنتاج أن $\alpha^2+9\equiv 2[4]$: يعني أن $\alpha=1+2k$ و k عدد صحيح بالتربيع نجد $\alpha^2=1+4k+4k^2$ أي أن $\alpha^2+9=10+4k+4k^2$ و منه $\alpha^2+9=2+4\left(2+k+k^2\right)$ أي أن $\alpha^2+9\equiv 2[4]$ و هو المطلوب

ج - إثبات أن المعادلة (E) لا تقبل حلول في $\mathbb{Z}$: $\alpha^2+9=2^n$ و $\alpha^2+9\equiv 2[4]$ يعني أن $2^n\equiv 2[4]$

و بما أن $n\geq 4$ فإن $2^n\equiv 0[4]$ أي أن $2\equiv 0[4]$ هذا مستحيل و منه المعادلة لا تقبل حلول في $\mathbb{Z}$

التمرين الثالث (05 نقاط) :

I - متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ $u_n=\int_{-1}^{1}\left(\frac{2|x|}{3}+\frac{e^{-2n|x|}}{3}\right)dx$.

1. إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_n>0$: من اجل كل عدد حقيقي x من $[-1;1]$ فإن $\frac{2.|x|}{3}+\frac{e^{-2n|x|}}{3}>0$

بالمكاملة نجد $\int_{-1}^{1}\left(\frac{2|x|}{3}+\frac{e^{-2n|x|}}{3}\right)dx>0$ أي أن $u_n>0$

2. إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_n=2\int_{0}^{1}\left(\frac{2x}{3}+\frac{e^{-2nx}}{3}\right)dx$:

$$u_n=\int_{-1}^{1}\left(\frac{2|x|}{3}+\frac{e^{-2n|x|}}{3}\right)dx=\int_{-1}^{0}\left(\frac{-2x}{3}+\frac{e^{2nx}}{3}\right)dx+\int_{0}^{1}\left(\frac{2x}{3}+\frac{e^{-2nx}}{3}\right)dx$$

بوضع $x=-t$ نجد $\begin{cases}dx=-dt\\ x=0\ ;\ t=0\\ x=-1\ ;\ t=1\end{cases}$: و منه $\int_{-1}^{0}\left(\frac{-2x}{3}+\frac{e^{2nx}}{3}\right)dx=-\int_{1}^{0}\left(\frac{2t}{3}+\frac{e^{-2nt}}{3}\right)dt=\int_{0}^{1}\left(\frac{2t}{3}+\frac{e^{-2nt}}{3}\right)dt$

إذن $u_n=2\int_{0}^{1}\left(\frac{2x}{3}+\frac{e^{-2nx}}{3}\right)dx$

3. إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}\int_{0}^{1}\left(1-e^{2x}\right).e^{-2(n+1)x}\,dx$: نحسب الفرق

$$u_{n+1}-u_n=2\int_{0}^{1}\left(\frac{2x}{3}+\frac{e^{-2.(n+1)x}}{3}\right)dx-2\int_{0}^{1}\left(\frac{2x}{3}+\frac{e^{-2nx}}{3}\right).dx=2\int_{0}^{1}\left(\frac{e^{-2(n+1).x}-e^{-2n.x}}{3}\right)dx$$

أي $u_{n+1}-u_n=2\int_{0}^{1}\left(\frac{e^{-2(n+1).x}.\left(1-e^{2x}\right)}{3}\right)dx$ أي أن $u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}\int_{0}^{1}\left(1-e^{2x}\right).e^{-2(n+1)x}\,dx$.

4. استنتاج إشارة $u_{n+1}-u_n$: بما أن الدالة $x\mapsto 1-e^{2x}$ متناقصة على المجال $[0;1]$ و صورة 0 بهذه الدالة هي 0 فإن الدالة $x\mapsto 1-e^{2x}$ سالبة على المجال $[0;1]$ و منه $\frac{2}{3}\int_{0}^{1}\left(1-e^{2x}\right).e^{-2(n+1)x}\,dx\le 0$ أي $u_{n+1}-u_n\le 0$ إذن المتتالية (u_n) متناقصة

استنتاج أن المتتالية متقاربة : (u_n) متتالية متناقصة و محدود من الأسفل فهي متتالية متقاربة

5. كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n : $u_n=2.\int_{0}^{1}\left(\frac{2x}{3}+\frac{e^{-2nx}}{3}\right)dx=2.\left[\frac{x^2}{3}-\frac{e^{-2nx}}{6n}\right]_0^1=\frac{2}{3}-\frac{e^{-2n}}{3n}+\frac{1}{3n}$ أي أن

$$u_n=\frac{2n-e^{-2n}+1}{3n}$$

حساب نهاية المتتالية (u_n) : بما أن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}-\frac{e^{-2n}}{3n}+\frac{1}{3n}\right)=\frac{2}{3}$ فإن $\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{2}{3}$.

II - نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ من أجل كل عدد طبيعي n فإن $v_n=2n.u_n$

و المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ من أجل كل عدد طبيعي n فإن $w_n = v_n - \frac{4n}{3} - \frac{2}{3}$

1. كتابة كل من u_n و w_n بدلالة n : $v_n = 2n.u_n$ أي أن $v_n = \frac{4n}{3} - \frac{2e^{-2n}}{3} + \frac{2}{3}$

$w_n = v_n - \frac{4n}{3} - \frac{2}{3}$ أي أن $w_n = \frac{4n}{3} - \frac{2e^{-2n}}{3} + \frac{2}{3} - \frac{4n}{3} - \frac{2}{3}$ و منه $w_n = -\frac{2e^{-2n}}{3}$

2. إثبات أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول : $w_{n+1} = -\frac{2e^{-2(n+1)}}{3} = -\frac{2e^{-2n}}{3}.\frac{1}{e^2}$ أي أن

$w_{n+1} = \frac{1}{e^2} w_n$ و منه المتتالية (w_n) هندسية أساسها $\frac{1}{e^2}$ و حدها الأول $w_1 = -\frac{2e^{-2}}{3}$

3. نضع $S_n = w_1 + w_2 + w_3 + ... + w_n$ و $S_n' = v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_n$ و أحسب المجموعين كل من بدلالة n

$S_n = w_1.\left[\frac{\frac{1}{e^{2n}} - 1}{\frac{1}{e^2} - 1}\right]$ أي أن $S_n = -\frac{2e^{-2}}{3}\left[\frac{e^{-2n} - 1}{e^{-2} - 1}\right]$

و $w_n = v_n - \frac{4n}{3} - \frac{2}{3}$ أي أن $v_n = w_n + \frac{4n}{3} + \frac{2}{3}$ مجموع متتالية هندسية و متتالية حسابية و منه

$S_n' = -\frac{2e^{-2}}{3}\left[\frac{e^{-2n} - 1}{e^{-2} - 1}\right] + \frac{n}{2}\left(\frac{4n}{3} + \frac{2}{3} + 2\right)$ أي أن $S_n' = -\frac{2e^{-2}}{3}\left[\frac{e^{-2n} - 1}{e^{-2} - 1}\right] + \frac{n}{2}\left(\frac{4n}{3} + \frac{8}{3}\right)$

التمرين الرابع (07 نقاط) :

I - g دالة عددية معرفة على $]0; +\infty[$ بـ $g(x) = x - 1 - \ln(x)$

1. حساب : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x) = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left[1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x}\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} x$ و

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \ln(x) = -\infty$

دراسة اتجاه تغيرات الدالة g : $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$ و هي سالبة على المجال $]0;1]$ و موجبة على المجال $[1; +\infty[$ و

منه g متناقصة على المجال $]0;1]$ و متزيدة على المجال $[1; +\infty[$

جدول تغيراتها :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

2. استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$: بما أن الدالة g تقبل قيمة حدية صغرى هي 0 فهي موجبة على مجال تعريفها

3. استنتاج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x : $\ln\left(\frac{x}{2}\right) \leq \frac{x}{2} - 1$

بما أنه من اجل كل عدد حقيقي موجب تماماً x فإن $x-1-\ln(x)\geq 0$ بوضع $x=\frac{x'}{2}$

نجد أنه من اجل كل عدد حقيقي موجب تماماً x' فإن $\frac{x'}{2}-1-\ln\left(\frac{x'}{2}\right)\geq 0$ أي أن $\ln\left(\frac{x'}{2}\right)\leq \frac{x'}{2}-1$

II - f دالة عددية معرفة على $[0;+\infty[$ بـ $\begin{cases} f(x)=-x^2+2+2x\ln(x) & :x>0 \\ f(0)=2 \end{cases}$

و (C_f) تمثيلها بياني في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$

1. أ- حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=2$ لأن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} x.\ln x=0$ أي أن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=f(2)$ نستنتج أن f مستمرة على يمين العدد 0

ب-إثبات أن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} \frac{f(x)-2}{x}=-\infty$: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} \frac{f(x)-2}{x}=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} \frac{-x^2+2x.\ln x}{x}$ أي

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} \frac{f(x)-2}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0} (-x+2\ln x)=-\infty$$

نستنتج أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 0 .

التفسير البياني للنتيجة : أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا موازي لحامل محور التراتيب عند النقطة ذات الفاصلة 0

ج-حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$: بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{x^2}+\frac{2\ln x}{x}\right]=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-1+\frac{2}{x^2}+\frac{2\ln x}{x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^2)=-\infty$ فإن

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

2. أ-إثبات انه من أجل كل عدد حقيقي موجب x : $f'(x)=-2g(x)$:

$f'(x)=-2x+2\ln x+2x\times\frac{1}{x}=-2x+2+\ln x=-2(x-1-\ln x)$ إذن $f'(x)=-2g(x)$

ب-دراسة إشارة $f'(x)$ على $]0;+\infty[$: $f'(x)=-2g(x)$ و هي سالبة على المجال $]0;+\infty[$ لأن $g(x)$ موجبة على هذا المجال .

استنتاج اتجاه تغيرات الدالة f : الدالة متناقصة على المجال $]0;+\infty[$.

بما أن $f'(1)=0$ و $f'(x)$ سالبة على المجال $]0;+\infty[$ و منه (C_f) يقبل نقطة انعطاف $A(1;1)$.

ج- كتابة معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 2 : $y=f'(2)(x-2)+f(2)$ أي أن

$y=-2(1-\ln 2).(x-2)-2+4\ln 2$ أي أن $y=-2(1-\ln 2).x+2$

د- التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماماً x : $f(x)+2(1-\ln 2)x-2=2x\left[-\frac{x}{2}+1+\ln\left(\frac{x}{2}\right)\right]$ لدينا

$f(x)+2(1-\ln 2)x-2=-x^2+2+2x.\ln x+2(1-\ln 2).x-2$ أي أن

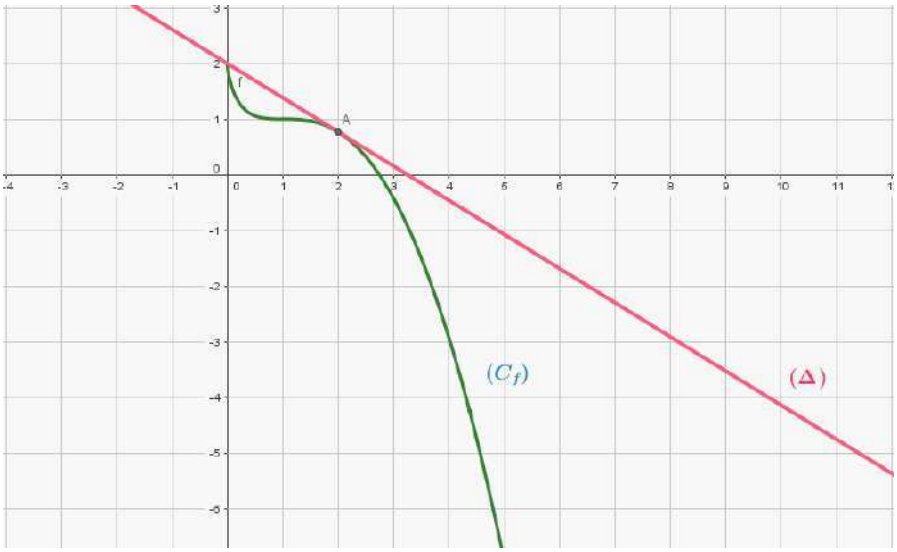
$f(x)+2(1-\ln 2)x-2=-x^2+2x.\ln x+2.(1-\ln 2).x=-x^2+2x\ln x+2x-2x.\ln 2$ أي أن

$f(x)+2(1-\ln 2)x-2=-x^2+2x\ln\left(\frac{x}{2}\right)+2x$ و منه $f(x)+2(1-\ln 2)x-2=2x\left[-\frac{x}{2}+\ln\left(\frac{x}{2}\right)+1\right]$ و هو المطلوب .

بما أن $g\left(\frac{x}{2}\right)\geq 0$ فإن الفرق $f(x)+2(1-\ln 2)x-2=-2x.g\left(\frac{x}{2}\right)$ سالب إذن المنحنى (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) .

3. إثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $2,7<\alpha<2,8$: لدينا $f(2,8)=-0,074$ و $f(2,7)=0,073$ و بما أن الدالة f مستمرة و متناقصة على $]0;+\infty[$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $2,7<\alpha<2,8$

إنشاء (Δ) و (C_f) :



4. h دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$: $\begin{cases} h(x)=-x^2+2+2|x|\ln(|x|): x\neq 0 \\ h(0)=2 \end{cases}$

و (C) تمثيلها بياني في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$

أ - إثبات أن h دالة زوجية : من أجل كل عدد حقيقي x :

$h(-x)=-(-x)^2+2+2|-x|.\ln(|-x|)=-x^2+2+2|x|.\ln(|x|)=h(x)$ و منه h دالة زوجية.

إنشاء (C_h) انطلاقا من (C_f) في نفس المعلم السابق: (C_h) منطبق على (C_f) في المجال $[0;+\infty[$

و (C_h) متناظر بالنسبة إلى حامل محور التراتيب لأن الدالة h زوجية .