

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية سعيده

المستوى: الثالثة علوم تجريبية

ثانوية حشمان محمد-يوب.

السنة الدراسية 2023 / 2024

المدة: 03سا

اختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات

💡 ملاحظة هامة! تؤخذ بعين الاعتبار ، فقط لا غير ، الإجابات الدقيقة و الواضحة .
 ⚠️ يمنع منعاً باتاً استعمال القلم المصحح " l'effaceur " و القلم الأحمر.

التمرين الأول:

(04pt) (المدة 35د)

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات التالية مع التبرير :

① حلول المعادلة التفاضلية $y' = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ هي :

أ) $y = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1} + c$ (ب) $y = \sqrt{x^2+1} + C$ (ج) $y = 2\sqrt{x^2+1} + c$

② قيم العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + (\alpha+2)^n$ متقاربة هي :

أ) $\alpha \in]-3; -1]$ (ب) $\alpha \in]-1; 1[$ (ج) $\alpha \in [-3; -1]$

③ العدد الحقيقي $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$ يساوي :

أ) $-\frac{2}{e} + 1$ (ب) $\frac{2}{e} - 1$ (ج) $\frac{2}{e}$

④ قسم به 24 تلميذ نريد تشكيل لجنة تضم مسؤول ونائب له وثلاث اعضاء لهم نفس المهمة ، عدد اللجان الممكن تشكيلها هو :

أ) 850080 (ب) 42504 (ج) 2092

التمرين الثاني:

(04pt) (المدة 40د)

لكن المتتالية (u_n) الحسابية متزايدة تماما حدها الأول u_0 وأساسها r حيث :

$$\begin{cases} u_1 + u_3 = 10 \\ u_1^2 + u_3^2 = 68 \end{cases}$$

- ① أحسب u_2 ثم r .
- ② أكتب بدلالة n عبارة الحد العام u_n
- ★ نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة : $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{u_n}$
- ① أثبت أن متتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها q وحدها v_2
- ② بين أن متتالية (v_n) متقاربة .
- ③ أحسب الجداء : $P = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^8 \times \dots \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2021}$

التمرين الثالث:

- (المدة 45د) (05pt)
- صندوقان غير شفافين U_1 و U_2 ، يحتوي U_1 على 4 كريات حمراء و 3 سوداء ، ويحتوي صندوق U_2 على 3 حمراء وكرة 1 سوداء فقط. (الكريات كلها متشابهة لانفرق بينها عند اللمس وغير مرقمة)
- ★ نرمي حجر نرد متوازن ذي ست اوجه مرقمة من 1 الى 6 .
- اذ ظهر رقم فردي نحسب كرتين في أن واحد من الصندوق U_1
 - اذ ظهر رقم زوجي نحسب كرتين في أن واحد من الصندوق U_2
- ★ نعتبر الأحداث التالية :
- A سحب كرتين حمراوين
 - B سحب كرتين سوداوين
 - C سحب كرتين من لونين مختلفين
 - D سحب كرة حمراء على أقل .
- ① أكمل شجرة الاحتمالات في (وثيقة مرافقة)
 - ② أحسب احتمالات الأحداث : ، B C ، A و D
- ★★ نعتبر X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات الحمراء المسحوبة .
- ③ أ) عين قيم المتغير العشوائي X
 - ب) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X
 - ④ أحسب الأمل الرياضي $E(X)$

التمرين الرابع:

(المدة 1سا) (07pt)

(I) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بالعلاقة : $f(x) = 1 + \frac{a + b \ln(x)}{x}$ حيث a و b عددين حقيقيين .
 ❶ عين عدداً حقيقيين a و b بحيث المنحنى (C_f) يقبل في نقطة $A(1; 2)$ مماساً موازياً لحامل لمحور
 فواصل.

المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ حيث وحدتي الطول
 • هو التمثيل البياني لدالة f .
 (C_f) , $(\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm)$

(II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = 1 + \frac{1 + \ln(x)}{x}$

❶ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. فسر نتائج بيانها

❷ بين أن مشتقة الدالة f تكتب بالشكل $f'(x) = -\frac{\ln(x)}{x^2}$

* إستنتج تغيرات الدالة f

** شكل جدول تغيرات الدالة f

❸ بين أن معادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $\alpha \in]0.27; 0.28[$

❹ أدرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (D) ذو معادلة $y = 1$

❺ أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في نقطة ذات فاصلة 1

❻ أرسم كل من : (T) ; (D) ; (C_f)

(III) ليكن العدد الحقيقي λ ، $1 < \lambda$ ، مساحة الحيز المحصور بين المنحنى (C_f) والمستقيمات $y = 1$ ،
 $x = \lambda$ ، $x = 1$

❶ أحسب $A(\lambda)$ بدلالة λ

❷ أحسب $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$

♠ أساتذة المادة : بالتوفيق في BAC2024 ♠

تصحيح - الإختبار للفصل الثاني شعبة ع ت -

المستوى : 3 ع ت 1 و 2

المادة : رياضيات

التمرين الأول:

تعين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات التالية مع التبرير:

$$y = 2\sqrt{x^2 + 1} + c \quad \text{ج 1}$$

التعليل: الدالة الاصلية لدالة: $x \mapsto \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ هي الدالة

$$x \mapsto 2\sqrt{x^2 + 1} + C$$

$$\alpha \in]-3; -1] \quad \text{أ 2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n \rightarrow +\infty} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha + 1)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

$$\text{نضع } q = \alpha + 2 \text{ نجد } q^n$$

$$-1 < \alpha + 2 \leq 1 \Rightarrow -3 < \alpha \leq -1$$

$$\Rightarrow \alpha \in]-3; -1]$$

$$\text{أ 3} \quad -\frac{2}{e} + 1 \quad \text{التعليل: بتطبيق تكامل بالتجزئة نجد}$$

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx &= \int_1^e \frac{1}{x^2} \ln x dx \\ &= \left[-\frac{1}{x} \ln x \right]_1^e - \int_1^e -\frac{1}{x} \times \frac{1}{x} dx \\ &= \left[-\frac{\ln x}{x} \right]_1^e - \int_1^e -\frac{1}{x^2} dx \end{aligned}$$

$$= - \left[\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \right]_1^e = -\frac{2}{e} + 1$$

$$A_{24}^2 \times C_{22}^3 = 850080 \quad \text{التعليل: 850080 أ 4}$$

التمرين الثاني:

$$\begin{cases} \mu_1 + \mu_3 = 10 \\ \mu_1^2 + \mu_3^2 = 68 \dots (*) \end{cases}$$

$$\mu_1 + \mu_3 = 2u_2 = 10 \quad \text{حساب } u_2$$

$$\begin{cases} \mu_1 = \mu_2 - r \\ \mu_3 = \mu_2 + r \dots (1) \end{cases} \quad \text{حساب } r$$

$$(u_2 - r)^2 + (u_2 + r)^2 = 68$$

$$(5 - r)^2 + (5 + r)^2 = 68$$

$$50 + 2r^2 = 68$$

$$r^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} r = 3, 5 \\ r = -3 \end{cases}$$

لان متتالية حسابية متزايدة اي ان $r > 0$

نعوض (1) في (*) نجد

2 كتابة (μ_n) بدلالة n

$$\mu_n = \mu_2 + (n - 2)r$$

$$\mu_n = 5 + (n - 2)(3)$$

$$\mu_n = 5 + 3n - 6$$

$$\mu_n = -1 + 3n$$

1 اثبات ان متتالية هندسية:

$$\nu_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\mu_n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1+3n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{3n}$$

$$V_n = \frac{1}{2^{-1}} \times \left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^n = 2 \times \left(\frac{1}{8}\right)^n$$

$$v_2 = \frac{1}{32} \quad \text{وحدها } q = \frac{1}{8}$$

$$\text{2} \quad (v_n) \text{ متتالية متقاربة لان } -1 < 9 = \frac{1}{8} < 1 \text{ وعليه}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$

3 حساب الجداء:

$$p = \left(\frac{1}{2}\right)^{5+8+\dots+2021}$$

$$p = \left(\frac{1}{2}\right)^{5+8+10+\dots+2 \cdot 11}$$

$$p = \left(\frac{1}{2}\right)^{\mu_2 + \mu_3 + \dots + \mu_{674}} (\mu_2 + \mu_{674}) \left(\frac{674-2+1}{2}\right)$$

$$p = \left(\frac{1}{2}\right)^{(5+2021) \left(\frac{674-2+4}{2}\right)}$$

$$P = \left(\frac{1}{2}\right)^{(5)}$$

التمرين الثالث:

1 اكمال شجرة احتمالات

2 حساب احتمال:

$$P(A) = P(\mu_1) \times P_{\mu_1}(RR) + P(\mu_1) \times P_{u_2}(RR)$$

$$P(A) = \frac{3}{6} \times \frac{6}{21} + \frac{3}{6} \times \frac{3}{6}$$

$$= \frac{18}{126} + \frac{9}{36} = \frac{1}{7} + \frac{1}{4}$$

$$P(A) = \frac{11}{28}$$

$$P(B) = P(\mu_1) \times P_{\mu_1}(NN) + P(\mu_2) \times P_{\mu_2}(NN)$$

$$= \frac{3}{6} \times \frac{3}{21} = \frac{9}{126}$$

$$P(B) = \frac{1}{14} = \frac{2}{28}$$

$$P(c) = P(\mu_1) \times P_{\mu_2}(NR) + P(\mu_2) \times P_{\mu_2}(NR)$$

$$= \frac{3}{6} \times \frac{12}{21} + \frac{3}{6} \times \frac{3}{6}$$

$$P(c) = \frac{36}{126} + \frac{9}{36}$$

$$P(c) = \frac{2}{7} + \frac{1}{4} = \frac{15}{28}$$

٥ حسب $E(x)$

$$E(x) = \sum_{i=1}^3 x_i p_i$$

$$E(x) = 0p(B) + p(c) \times 1 + 2p(A)$$

$$E(x) = p(c) + 2p(1)$$

$$E(x) = \frac{15}{28} + 2 \times \frac{11}{28}$$

$$E(x) = \frac{37}{28} \simeq 1,32$$

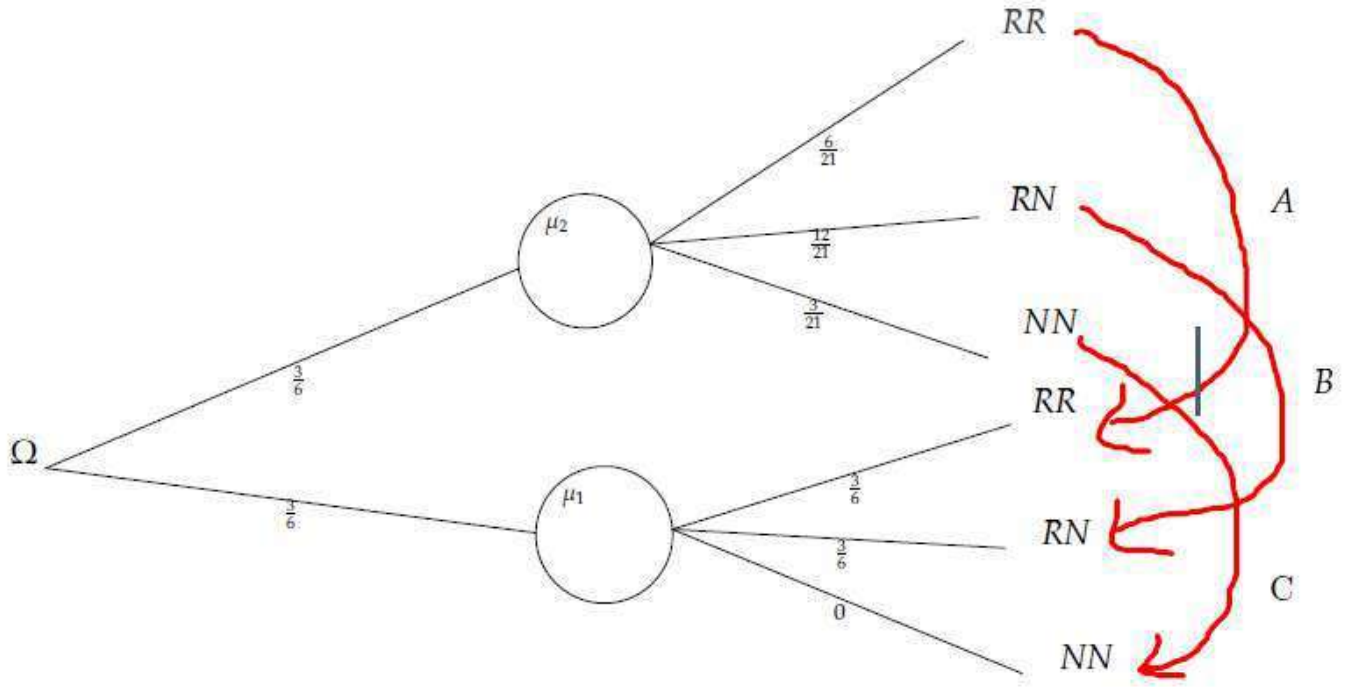
$$P(D) = p(C) + P(A)$$

$$P(D) = \frac{15}{28} + \frac{11}{28} = \frac{26}{28}$$

٣ تعيين قيم متغير عشوائي : $X = \{0; 1; 2\}$

٤ تعيين قانون احتمال :

X	0	1	2	مجموع :
$P(X)$	$P(B)$	$P(C)$	$f(A)$	1



التمرين الرابع:

I. لدينا : $g(x) = 1 + \frac{a+b \ln(x)}{x}$

⇨ تعيين قيمة كل من العددين a, b بحيث المنحني (C_g) يقبل في النقطة $A(1;2)$ مماسا يوازي $(x'x)$:

معناه $g(1) = 2$ و $g'(1) = 0$

• $g(1) = 2$ معناه $1 + \frac{a+b \ln(1)}{1} = 2$ ومنه $1+a=2$ أي $a=1$.

• ولدينا : $g'(x) = \frac{b-a-b \ln(x)}{x^2}$ أي $g'(x) = \frac{\frac{b}{x} \times x - (a+b \ln(x))}{x^2} = \frac{b-a-b \ln(x)}{x^2}$

$g'(1) = 0$ معناه $\frac{b-1-b \ln(1)}{1^2} = 0$ أي $b-1=0$ ومنه $b=1$

و بالتالي : $g(x) = 1 + \frac{1+\ln(x)}{x}$

II. لدينا : $f(x) = 1 + \frac{1+\ln(x)}{x}$

(1) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1+\ln(x)}{x} \right) = -\infty$ لأن $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+\ln(x)}{x} = -\infty \end{cases}$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1+\ln(x)}{x} \right) = 1$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x} \right) = 0$

⇨ التفسير الهندسي للنتيجتين :

المنحني (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين : $x=0$ (مستقيم مقارب عمودي) و $y=1$ (مستقيم مقارب أفقي) .

(2) حساب المشتقة : $f'(x) = \frac{1-1-\ln(x)}{x^2} = -\frac{\ln(x)}{x^2}$ و $f'(x) = -\frac{\ln(x)}{x^2}$

- دراسة إشارة المشتقة : إشارة $f'(x)$ عكس إشارة $\ln(x)$

x	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$		0	+
$f'(x)$		0	-

- جدول تغيرات الدالة f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	2	1

$$f(1) = 1 + \frac{1 + \ln(1)}{1} = 1 + 1 = 2$$

(3) اثبات أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]0.27; 0.28[$:

▪ الدالة f مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[0.27; 0.28]$

▪ ولدينا : $f(0.27) = 1 + \frac{0.27 + \ln(0.27)}{0.27} = -0.15$ و

$$f(0.28) = 1 + \frac{0.28 + \ln(0.28)}{0.28} = 0.03$$

$$\text{إذن : } f(0.27) \times f(0.28) < 0$$

- حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]0.27; 0.28[$.

(4) دراسة الوضعية النسبية للمنحني (e_f) بالنسبة الى المستقيم (d) ذي المعادلة $y = 1$:

$$\text{ندرس إشارة الفرق } f(x) - y = 1 + \frac{1 + \ln(x)}{x} - 1 = \frac{1 + \ln(x)}{x}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{\ln(x)} = e^{-1} \\ x \in]0; +\infty[\end{array} \right\} \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} \ln(x) = -1 \\ x \in]0; +\infty[\end{array} \right\} \text{ أي } \left\{ \begin{array}{l} 1 + \ln(x) = 0 \\ x \in]0; +\infty[\end{array} \right\} \text{ معناه } f(x) - y = 0$$

$$\text{وبالتالي : } x = e^{-1}$$

▪ جدول إشارة الفرق :

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$1 + \ln(x)$	-	0	+
$f(x) - y$	-	0	+
الوضعية النسبية	(e_f) تحت (d)	(e_f) يقطع (d)	(e_f) فوق (d)

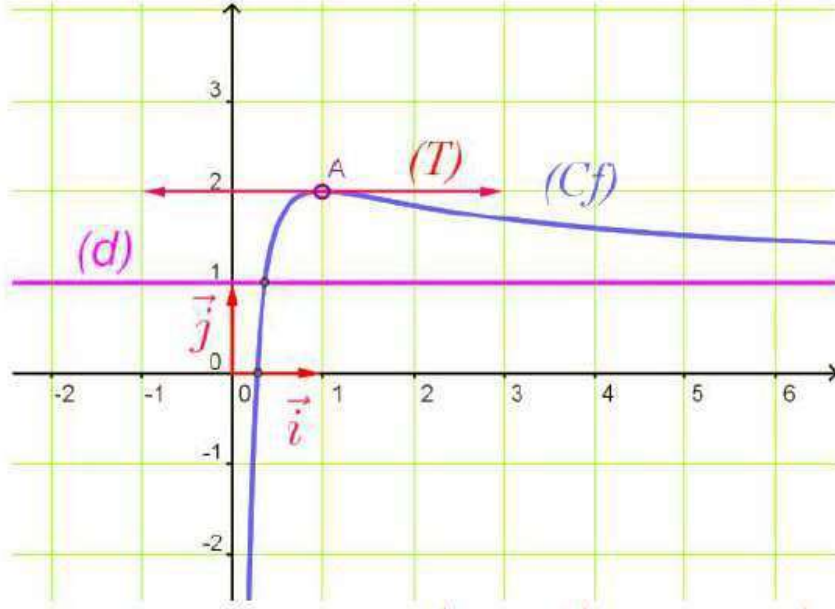
(5) كتابة معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 أي عند النقطة $A(1;2)$:

$$f(1) = 2, f'(1) = 0$$

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 0 \times (x - 1) + 2 = 2$$

$$(T): y = 2$$

(6) الرسم :



⑥

$$\begin{aligned} [1] \quad A(\lambda) &= \int_1^\lambda [f(x) - y] dx = \int_1^\lambda \left(1 + \frac{\ln(x)}{x} - x \right) dx \quad (4 \text{ cm}^2) \\ &= \int_1^\lambda \frac{1 + \ln x}{x} dx = \int_1^\lambda \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \right) dx \quad (4 \text{ ma}^2) \\ &= \left[\ln x + \frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_1^\lambda \ln^2 \\ &= \left(\ln \lambda + \frac{1}{2} (\ln(\lambda))^2 \right) 4 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$[2] \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = +\infty$$