



7 110320 150385

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

فرض الثلاثي الأول
الاثنين 10 نوفمبر 2025

ثانوية أبي زر الغفاري ، خميس مليانة
السنة الثالثة تسيير و إقتصاد

المدة : ساعة واحدة

المادة : رياضيات

التمرين الأول: (12 نقطة)

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = \frac{1}{2}$ وبالعلاقة التراجعية : $u_{n+1} = \frac{7}{6}u_n - \frac{9}{2}$

1. أ) أحسب قيمة الحدين u_1 و u_2
ب) نمن اتجاه تغير المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
ج) بين أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ليست حسابية و ليست هندسية .
2. برهن بالتراجع ومن أجل كل عدد طبيعي n أن : $u_n \leq 1$.
3. أدرس اتجاه تغير المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
4. $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ ب : $v_n = u_n - 27$.
أ) بين أن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0 .
ب) أكتب عبارة الحد العام للمتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
ج) إستنتج عبارة u_n بدلالة n .
د) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ، ماذا تستنتج ؟
5. أ) أحسب المجموع S حيث : $S = v_2 + v_3 + \dots + v_{51}$
ب) استنتج قيمة المجموع P حيث : $P = u_2 + u_3 + \dots + u_{51}$

التمرين الثاني: (08 نقاط)

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ ب : $u_0 = 3$ و : $u_6 + u_7 + u_8 = 156$

1. أحسب قيمة u_7 ثم إستنتج قيمة الأساس r .
2. أكتب عبارة u_n بدلالة العدد الطبيعي n .
3. أحسب الحد الثالث عشر للمتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
4. هل 14178 حد من حدود المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ؟ حدد رتبته .
5. أحسب المجموع S حيث : $S = u_7 + u_8 + u_9 + \dots + u_{2025}$

حل التمرين الأول :

1. حساب قيمة الحدين : $0.50 + 0.50 \dots$

لدينا : $u_1 = \frac{7}{6}u_0 - \frac{9}{2} = \frac{7}{6}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{9}{2} = -\frac{47}{12}$

و : $u_2 = \frac{7}{6}u_1 - \frac{9}{2} = \frac{7}{6}\left(-\frac{47}{12}\right) - \frac{9}{2} = -\frac{653}{72}$

ب) تخمين اتجاه التغير : $0.50 \dots$

بما أن : $u_0 > u_1 > u_2$ فإن نخمن أن :

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متناقصة تماما

ج) تبيان أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ لا حسابية ولا هندسية :

بما أن : $u_1 - u_0 = -\frac{47}{12} - \frac{1}{2} = -\frac{53}{12}$

و : $u_2 - u_1 = -\frac{653}{72} + \frac{47}{12} = -\frac{371}{72}$

فإن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ليست متتالية حسابية . $0.50 + 0.50$

وبما أن : $\frac{u_1}{u_0} = \frac{-47}{12} \times 2 = \frac{-47}{6}$

و : $\frac{u_2}{u_1} = \frac{-653}{72} \times \frac{-12}{47} = \frac{653}{282}$

فإن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ليست متتالية هندسية . $0.50 + 0.50$

2. البرهان بالتراجع : $0.50 + 0.50 + 0.50 \dots$

التحقق : من أجل $n = 0$ لدينا : $u_0 = \frac{1}{2}$ و $u_0 \leq 1$

وبالتالي الخاصية محققة من أجل $n = 0$.

الفرضية :

نفرض أن : $u_n \leq 1$ من أجل العدد الطبيعي n .

الإثبات : لنبين أن : $u_{n+1} \leq 1$

لدينا حسب الفرضية : $u_n \leq 1$ و بضرب طرفي

المتباينة في $\frac{7}{6}$ نجد : $\frac{7}{6}u_n \leq \frac{7}{6}$ ثم بإضافة $-\frac{9}{2}$ إلى طرفي المتباينة نجد :

$$\frac{7}{6}u_n - \frac{9}{2} \leq \frac{-20}{6} \leq 1$$

أي : $u_{n+1} \leq 1$ وبالتالي حسب مبدأ البرهان بالتراجع

$u_n \leq 1$ مهما يكن العدد الطبيعي n

3. دراسة اتجاه تغير المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$: $01 \dots$

لدينا : $u_{n+1} - u_n = \frac{7}{6}u_n - \frac{9}{2} - u_n$

$$= \left(\frac{7}{6} - 1\right)u_n - \frac{9}{2}$$

$$= \frac{1}{6}u_n - \frac{9}{2}$$

وبما أن : $u_n \leq 1$ فإنه بضرب طرفي المتباينة في $\frac{1}{6}$

نجد : $\frac{1}{6}u_n \leq \frac{1}{6}$ ثم بإضافة $-\frac{9}{2}$ إلى طرفي المتباينة

نجد : $\frac{1}{6}u_n - \frac{9}{2} \leq \frac{-26}{6} \leq 0$ أي : $u_{n+1} - u_n \leq 0$

وبالتالي : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متناقصة تماما

4. تبيان أن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ هندسية : $0.50 + 0.50$

لدينا : $v_{n+1} = u_{n+1} - 27 = \frac{7}{6}u_n - \frac{9}{2} - 27$

$$= \frac{7}{6}u_n - \frac{63}{2} = \frac{7}{6}\left(u_n - \frac{63}{7}\right)$$

$$= \frac{7}{6}(u_n - 27) = \frac{7}{6}v_n$$

وبالتالي $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها : $q = \frac{7}{6}$

وحدها الأول : $v_0 = u_0 - 27 = \frac{1}{2} - 27 = -\frac{53}{2}$

ب) عبارة الحد العام للمتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$: $01 \dots$

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية معناه : $v_n = v_p \times q^{n-p}$

ومنه : $v_n = v_0 \times \left(\frac{7}{6}\right)^n = -\frac{53}{2} \times \left(\frac{7}{6}\right)^n$

ج) استنتاج عبارة الحد العام لـ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$: $01 \dots$

لدينا : $v_n = u_n - 27$ ومنه : $u_n = v_n + 27$

أي : $u_n = -\frac{53}{2} \times \left(\frac{7}{6}\right)^n + 27$

د) حساب نهاية u_n : $0.50 + 0.50 \dots$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-53}{2} \times \left(\frac{7}{6}\right)^n + 27 = -\infty$$

ورتبته : $2026 = 2025 + 1$

5. حساب المجموع S : 02

$$\begin{aligned} S &= u_7 + u_8 + u_9 + \dots + u_{2025} \\ &= \frac{(2025 - 7 + 1)(u_7 + u_{2025})}{2} \\ &= \frac{2019(52 + 14178)}{2} \\ &= 14365185 \end{aligned}$$

وبالتالي نستنتج أن : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متباعدة .

أ.5 حساب المجموع S : 01

$$\begin{aligned} S &= v_2 + v_3 + \dots + v_{51} \\ &= \frac{v_2}{1-q} (1 - q^{51-2+1}) \\ &= \frac{-2597}{1 - \frac{7}{6}} \left(1 - \left(\frac{7}{6} \right)^{50} \right) = \frac{2597}{12} \left(1 - \left(\frac{7}{6} \right)^{50} \right) \end{aligned}$$

ب. إستنتاج المجموع P : 01

$$\begin{aligned} P &= u_2 + u_3 + \dots + u_{51} \\ &= v_2 + 27 + v_3 + 27 + \dots + v_{51} + 27 \\ &= v_2 + v_3 + \dots + v_{51} + 27 + 27 + \dots + 27 \\ &= S + 27 \times 50 = 1350 + \frac{2597}{12} \left(1 - \left(\frac{7}{6} \right)^{50} \right) \\ &= \frac{18797}{12} \left(1 - \left(\frac{7}{6} \right)^{50} \right) \end{aligned}$$

حل التمرين الثاني :

1. حساب u_7 واستنتاج r : 01 + 01

لدينا حسب خاصية الوسط الحسابي : $u_6 + u_8 = 2u_7$
وبالتالي المعادلة : $u_6 + u_7 + u_8 = 156$ تصبح :

$$\begin{aligned} u_7 &= \frac{156}{3} = 52 \text{ ومنه } 3u_7 = 156 \\ \text{ولدينا : } u_0 + 7r &= u_7 \text{ ومنه } 3 + 7r = 52 \\ r &= \frac{49}{7} = 7 \text{ أي : } \end{aligned}$$

2. كتابة عبارة u_n بدلالة n : 01

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية حسابية معناها :

$$u_n = u_p + (n - p) \times r$$

$$\text{ومنه : } u_n = u_0 + 7 \times n = 7n + 3$$

3. حساب الحد الثالث عشر : 01

$$\text{لدينا : } u_{12} = 7 \times 12 + 3 = 87$$

4. تعيين رتبة الحد الذي قيمته 14178 : 02

$$\text{لدينا : } 7n + 3 = 14178 \text{ ومنه : } 7n = 14175$$

$$\text{أي : } n = \frac{14175}{7} = 2025 \in \mathbb{N} \text{ وبالتالي الحد}$$

الذي قيمته 14178 هو حد من حدود المتتالية

$$u_{2025} = 14178 \text{ حيث : } (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$$