

التمرين :

لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = e^{2x} - 2e^x - 2$

وليكن (C_g) منحناها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

2- ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

3- عين نقط تقاطع (C_g) مع محوري الاحداثيات.

4- استنتج إشارة الدالة g على $\mathbb{R}$.

5- بين أن المنحنى (C_g) يقبل النقطة A كنقطة انعطاف يطلب تعيين احداثياتها.

6- اكتب معادلة المماس (T) عند النقطة A .

7- أنشئ المنحنى (C_g) والمماس (T) .

لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = |e^{2x} - 2e^x - 2|$

وليكن (C_h) منحناها البياني المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- اكتب عبارة الدالة $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.

2- بين أنه يمكن إنشاء المنحنى (C_h) انطلاقا من المنحنى (C_g) , ثم أنشئ (C_h) في نفس المعلم.

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (e^{-x} + 1)^2 + x - 1$

ليكن (C_f) منحناها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

3- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = e^{-2x} g(x)$

- استنتج اتجاه التغير للدالة f ثم شكل جدول تغيراتها $(f(\ln(\sqrt{3}+1)) \approx 1,9)$

4- اكتب معادلة المماس (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

5- احسب القيمة التقريبية لـ $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ ثم أنشئ المنحنى (C_f) والمماس (Δ)

- نعتبر المستقيمت (D_m) المعرفة على بالمعادلة: $y = mx + 3$

- بين أن المستقيمت (D_m) تشمل نقط ثابتة يطلب تعيين احداثياتها.

- ناقش بيانا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = mx + 3$.

تحيات

الأستاذ: قشار صالح

انتهى بالتوفيق للجميع



الطريق إلى بكالوريا 2021

حل التمرين

لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = e^{2x} - 2e^x - 2$

وليكن (C_g) منحناها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} - 2e^x - 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(e^x - 2 - \frac{2}{e^x} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} - 2e^x - 2 = -2,$$

فسر النتيجة هندسيا للمنحنى (C_g) مستقيم مقارب معادلته $y = -2$

2- دراسة اتجاه تغير الدالة g

أ- حساب المشتقة:

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$g'(x) = 2e^{2x} - 2e^x = 2e^x(e^x - 1)$$

ب- دراسة إشارة المشتقة g'

لدينا $2e^x > 0$ ومنه إشارة g' من إشارة $(e^x - 1)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - 1$	$-$	0	$+$
$g'(x)$	$-$	0	$+$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$

ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty; 0]$

ج- تشكيل جدول تغيرات الدالة g

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	-2	-3	$+\infty$

3- تعيين نقط تقاطع (C_g) مع محوري الأحداثيات.

- تقاطع (C_g) مع محور الترتيب: $g(0) = -3$

- تقاطع (C_g) مع محور الفواصل: نحل المعادلة $g(x) = 0$

$$e^{2x} - 2e^x - 2 = 0$$

$$\text{نضع } e^x = X \text{ ومنه } X^2 - 2X - 2 = 0$$

- حساب المميز $\Delta = 12$ ومنه

$$X_1 = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3} \text{ و } X_2 = 1 - \sqrt{3}$$

$$\text{ومنه } e^x = 1 + \sqrt{3} \text{ تكافئ } x = \ln(1 + \sqrt{3})$$

$$s = \left\{ \ln(1 + \sqrt{3}) \right\} \text{ مرفوض ومنه } e^x = 1 - \sqrt{3}$$

4- استنتاج إشارة الدالة g على $\mathbb{R}$.

$$g(x) = e^{2x} - 2e^x - 2 = (e^x - \ln(1 + \sqrt{3}))(e^x - 1 + \sqrt{3})$$

لدينا $e^x - 1 + \sqrt{3} > 0$ ومنه إشارة الدالة g من إشارة $e^x - \ln(1 + \sqrt{3})$

x	$-\infty$	$\ln(\sqrt{3}+1)$	$+\infty$
$e^x - \ln(\sqrt{3}+1)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$-$	0	$+$

5- تبين أن المنحنى (C_g) يقبل النقطة A كنقطة انعطاف

$$g''(x) = 4e^{2x} - 2e^x = 2e^x(2e^x - 1)$$

جدول الإشارة للدالة المشتقة الثانية g''

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$+\infty$
$2e^x - 1$	$-$	0	$+$
$g''(x)$	$-$	0	$+$

بما أن الدالة المشتقة الثانية انعدمت مغيرة من اشارتها فإن المنحنى (C_g)

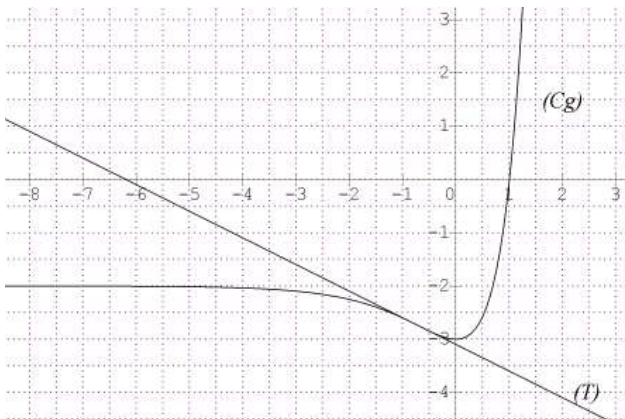
يقبل نقطة انعطاف احداثياتها $A\left(-\ln 2; -\frac{11}{4}\right)$

6- كتابة معادلة المماس (T) عند النقطة A :

$$y = g'(-\ln 2)(x + \ln 2) + g(-\ln 2)$$

$$\text{ومنه } = -\frac{1}{2}x - \frac{\ln 2}{2} - \frac{11}{4}$$

7- إنشاء المنحنى (C_g) والمماس (T)



لتكن الدالة h المعرف على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = |e^{2x} - 2e^x - 2|$

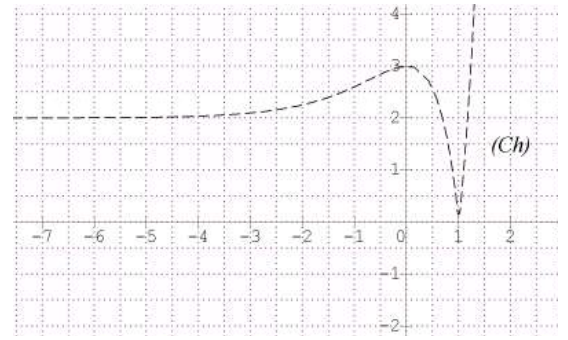
وليكن (C_h) منحناها البياني المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- كتابة عبارة الدالة $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة

$$\begin{cases} h(x) = g(x) & x \geq \ln(\sqrt{3} + 1) \\ h(x) = -g(x) & x \leq \ln(\sqrt{3} + 1) \end{cases}$$

2- بيان أنه يمكن إنشاء المنحنى (C_h) انطلاقاً من المنحنى (C_g)

نحتفظ بالجزء من (C_g) الواقع فوق محور الفواصل ثم نرسم النظير بالنسبة لمحور الفواصل للجزء من (C_g) الواقع تحت محور الفواصل.



لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$: $f(x) = (e^{-x} + 1)^2 + x - 1$

ليكن (C_f) منحنىها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O'; \vec{i}', \vec{j}')$.

1- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + 1)^2 + x - 1 = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x} + 1)^2 + x - 1 = +\infty$

2- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(e^{-x} + 1)^2 + x - 1 - x] = 0$

فسر النتيجة هندسياً للمنحنى (C_f) مستقيم مقارب معادلته $y = x$

3- تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = e^{-2x} g(x)$

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$

$f'(x) = -2e^{-x} (e^{-x} + 1) + 1 = e^{-2x} (-2 - 2e^x + e^{2x}) = e^{-2x} g(x)$

-استنتاج اتجاه التغير للدالة f

لدينا $e^{-2x} > 0$ ومنه إشارة الدالة f' من إشارة $g(x)$.

x	$-\infty$	$\ln(\sqrt{3}+1)$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

الدالة f متزايدة تماماً على $[-\infty; \ln(\sqrt{3}+1)]$ ومتزايدة تماماً على $[\ln(\sqrt{3}+1); +\infty]$

- تشكيل جدول تغيرات الدالة f ($f(\ln(\sqrt{3}+1)) \approx 1,9$)

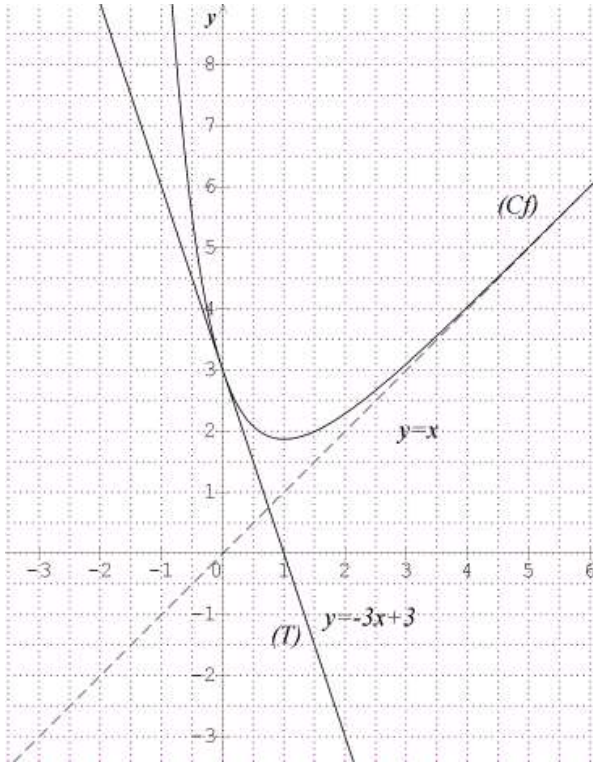
x	$-\infty$	$\ln(\sqrt{3}+1)$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\ln(\sqrt{3}+1))$	$+\infty$

4- كتابة معادلة المماس (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

ومن معادلة المماس (Δ) هي: $y = -3x + 3$

5- إنشاء المنحنى (C_f) والمماس (Δ) ولدينا $f(-\frac{1}{2}) \approx 5,5$



نعتبر المستقيمت (D_m) المعرفة على بالمعادلة: $y = mx + 3$

- تبيان أن المستقيمت (D_m) تشمل نقطة ثابتة

$y = mx + 3$ يكافئ $0 = mx + 3 - y$ ومنه $x = 0$ و $3 - y = 0$

ومنه $x = 0$ و $y = 3$

ومن المستقيمت (D_m) تشمل النقطة ثابتة $(0; 3)$

- المناقشة بيانا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة

$$f(x) = mx + 3$$

ومن حلول المعادلة $f(x) = mx + 3$ هي فواصل تقاطع المنحنى

(C_f) والمستقيمت $y = mx + 3$

حيث الوسيط m هو معامل توجيه المستقيمت (D_m)

$m \in [-\infty; -3]$ المعادلة تقبل حلين.

$m = -3$ المعادلة تقبل حل مضاعف.

$m \in]-3; 1]$ المعادلة تقبل حلين.

$m \in [1; +\infty[$ المعادلة تقبل حل وحيد

تمت

انتهى بالتوفيق للجميع

الأستاذ: قشار صلح



الطريق إلى بكالوريا 2021