الموسم الدراسي: 1447 هـ/ 2025^{2026} م
مديرية التربية لولاية الجزائر غرب
البكالوريا التجريبي في الرياضيات
للسنة الثالثة ثانوي شعبة رياضيات

أستاذ المادة: مزروح يوسف

المدة: 4 ساعات ونصف

رابط الحل
E² Mezrouh
التاريخ: 2026/05/03

على المترشح إختيار احد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين 1 (5 نقطة)

I) نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(E): 67x-3y=317$.

1 **أ)** عيّن حلاً خاصاً $(x_0;y_0)$ للمعادلة (E) يُحقق الشرط: $y_0-x_0=1$.
ب) استنتج حلول المعادلة (E) في $\mathbb{Z}^2$.

2 ليكن $d=\text{PGCD}(x;y)$ حيث $(x;y)$ حل للمعادلة (E).
أ) عيّن القيم الممكنة للعدد d.
ب) عيّن الثنائيات $(x;y)$ التي من أجلها يكون $d=317$.

α و β عددان طبيعيان حيث $\alpha\neq 0$.
II) N عدد طبيعي يُكتب في نظام التعداد ذي الأساس 7 على الشكل $N=\overline{\alpha\beta 23}$،
ويُكتب في نظام التعداد ذي الأساس 8 على الشكل $N=\overline{3(\beta+1)\alpha 2}$.

1 عيّن قيمتي α و β.

2 اكتب العدد N في النظام العشري.

III)

1 أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 7.

www.dzexams.com Subscribe

2 عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد A_n مضاعفاً للعدد 7 حيث:

$$A_n = 2026^{6n+2} + 4 \times 2025^{3n} + n$$

3 نضع من أجل كل عدد طبيعي n المجموع S_n حيث:

$$S_n = 2026^0 + 2026^1 + 2026^2 + \cdots + 2026^n$$

أ) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $2025S_n = 2026^{n+1} - 1$.

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، يكون: $S_n \equiv 4(3^{n+1} - 1)[7]$.

ج) عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون: $S_n \equiv 0[7]$.

التمرين 2 (4 نقطة)

يحتوي قسم على 10 أشخاص: 6 رجال (من بينهم صفوان) و 4 نساء (من بينهن صونيا).
نريد اختيار لجنة تضم رئيسًا ونائبين له (النائبان لا يتمايزان فيما بينهما).

1 ما هو احتمال أن يكون صفوان رئيسًا للجنة؟

2 بيّن أن احتمال أن تكون صونيا نائبةً في اللجنة هو $\frac{1}{5}$.

3 ما احتمال أن تضمّ اللجنة صفوان وصونيا معًا؟

4 ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل اختيار عدد النساء في اللجنة.

(أ) حدد قيم X الممكنة.

(ب) عرّف قانون احتمال X واحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

الجزء الثاني: نضيف إلى الأشخاص الـ 10 السابقين n شخصًا جديدًا (كلهم رجال)، حيث $n \geq 1$.
نختار الآن عشوائيًا وفي آن واحد شخصين . ليكن P_n احتمال اختيار شخصين من نفس الجنس.

1 بيّن أن: $P_n = \dfrac{(n+6)(n+5)+12}{(n+10)(n+9)}$.

2 عيّن قيمة n حتى يكون $P_n = \dfrac{7}{13}$.

التمرين 3 (4 نقطة)

1 نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية: $(E): z^2-2z\sqrt{2}+4=0$.

(أ) حل المعادلة (E)، نعتبر z_1 هو الحل الذي جزؤه التخيلي موجب و z_2 هو الحل الآخر.

(ب) اكتب على الشكل الأسي العدد المركب $\dfrac{z_1}{z_2}$.

(ج) عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقياً.

2 في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، الوحدة 1cm، نعتبر النقاط A ، B و Ω لواحقها على الترتيب:

$$z_A=\sqrt{2}(1+i) \quad , \quad z_B=\sqrt{2}(1-i) \quad , \quad z_\Omega=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(أ) عين لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالتحاكي h ذو المركز Ω والنسبة -3.

(ب) عين لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالدوران R ذو المركز O والزاوية $-\dfrac{\pi}{2}$.

3 مثل بدقة النقاط A ، B و D في المستوي المركب. مع شرح طريقة التمثيل

4 أكتب العدد $\dfrac{z_C-z_A}{z_D-z_A}$ على الشكل الجبري، ثم فسر النتيجة هندسياً.

5 لتكن I منتصف القطعة $[CD]$، و E نظيرة A بالنسبة إلى I. بين أن الرباعي $ACED$ مربع.

6 عين مجموعة النقاط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث:

$$\arg((z-z_\Omega)^2)=\frac{\pi}{4}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$

التمرين 4 (7 نقطة)

I) لتكن g_n الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g_n(x)=nx+e^x$ ، $n\in\mathbb{N}^*$.

1 أدرس اتجاه تغير الدالة g_n، ثم شكل جدول تغيراتها.

www.dzexams.com

2 بين أن المعادلة $g_n(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلاً وحيداً α_n، ثم تحقق أن $-1<\alpha_n<0$.

3 استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g_n(x)$.

II) نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f_n(x)=\dfrac{(x-1)e^x}{n+e^x}$

1 أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$ وفسر النتيجة هندسياً.

2 أ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f_n(x)-(x-1)]$، ماذا تستنتج؟

جـ- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_n) والمستقيم $(\Delta): y=x-1$.

3 أ- بين أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $f_n'(x)=\dfrac{e^x\cdot g_n(x)}{(n+e^x)^2}$.

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f_n، ثم شكل جدول تغيراتها.

4 بين أن: $f_n(\alpha_n)=\alpha_n$.

5 أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1}).

6 أنشئ كلاً من: (Δ)، (C_1)، (C_2) و (C_3).

III) نضع: $I=\int_{-1}^{0}(x-1)e^x dx$ و $u_n=\int_{-1}^{0} f_n(x)dx$.

1 أحسب I باستخدام المكاملة بالتجزئة.

2 بين أنه من أجل كل $x\in[-1;0]$: $\dfrac{(x-1)e^x}{n}\le f_n(x)\le\dfrac{(x-1)e^x}{n+1}$

3 بين أن المتتالية (u_n) متقاربة، وأحسب نهايتها.

4 نضع: $V_n=\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

أ- بين أنه من أجل كل $k\in\mathbb{N}^*$: $\int_{k+1}^{k+2}\dfrac{1}{t}dt\le\dfrac{1}{k+1}$.

ب- استنتج أن: $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k+1}\ge\ln(n+2)-\ln 2$.

جـ- استنتج: $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.

إنتهى الموضوع الأول

www.dzexams.com

الموضوع الثاني

التمرين 1 (4 نقطة)

I) من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$، نُعرف العددين A_n و B_n كما يلي:

$$B_n = 2n^2+3n+5 \quad \text{و} \quad A_n = 2n^2+3n-2$$

ليكن $d_n = \text{PGCD}(A_n;B_n)$ و $m_n = \text{PPCM}(A_n;B_n)$.

1 أ) بيّن أن العدد d_n قاسم للعدد 7.

ب) تحقق أن: $A_n = (n+2)(2n-1)$.

ج) استنتج قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $d_n = 7$.

2 عبّر عن المضاعف المشترك الأصغر m_n بدلالة n في كل حالة من الحالتين: $d_n = 7$ و $d_n = 1$.

II) نعتبر العددين الطبيعيين a و b حيث $(a<b)$، واللذان يُحققان العلاقة:

$$m-3d = 273$$

حيث $d = \text{PGCD}(a;b)$ و $m = \text{PPCM}(a;b)$.

1 بيّن أن d قاسم للعدد 273.

2 علماً أن d عدد أولي، استنتج القيم الممكنة للعدد d.

3 نفرض في هذا السؤال أن $d = 7$.

أ) بيّن أنه يوجد عددان طبيعيان x و y أوليان فيما بينهما حيث $a = 7x$ و $b = 7y$ ويُحققان: $xy = 42$.

ب) استنتج الثنائيات $(a;b)$ الممكنة.

ج) تحقق أن الثنائية $(A_4;B_4)$ هي إحدى حلول هذه الجملة.

III)

1 حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(E): 7x-6y = 1$.

www.dzexams.com

2 N عدد طبيعي يُحقق الجملة التالية:

$$\begin{cases} N \equiv 3[7] \\ N \equiv 4[6] \end{cases}$$

أ) بيّن أنه إذا كان N حلاً لهذه الجملة، فإنه توجد ثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) بحيث $N = 7x + 3$.
ب) استنتج أن: $N \equiv 10[42]$.

3 عيّن العدد الطبيعي N علماً أن حاصل القسمة الإقليدية للعدد N على A_4 هو $B_4 - 1$.

التمرين 2 (4 نقطة)

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرّفة بـ: $u_0 = -\frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = (u_n + 1)e^{u_n} - 1$.

1 برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $-1 \leq u_n \leq -\frac{1}{2}$.

2 من أجل كل عدد حقيقي x ، ادرس إشارة

$$(x+1)(e^x - 1)$$

استنتج إتجاه تغير المتتالية (u_n) .

3 بيّن أنّ المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

4 بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$1 + u_{n+1} \leq \frac{1}{\sqrt{e}}(1 + u_n) \quad \text{وأنّ} \quad 1 + u_n \leq \frac{e^{-\frac{n}{2}}}{2}$$

استنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

5 من أجل كل عدد n من $\mathbb{N}^*$ نضع :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$$

بيّن أنّ : $S_n = \ln(2u_n + 2)$.

www.dzexams.com

التمرين 3 (5 نقطة)

I. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ الجملة التالية ذات المجهولين α و β:

$$\begin{cases} \alpha+\beta=2\sqrt{2} \\ \overline{\alpha}-\overline{\beta}=-2i\sqrt{6} \end{cases}$$

II. في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$، نعتبر النقط A، B و C التي لواحقها :

$$Z_A=\sqrt{2}+i\sqrt{6} \quad , \quad Z_B=\sqrt{2}-i\sqrt{6} \quad , \quad Z_C=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$$

1 أكتب كلاً من Z_A و Z_C على الشكل الأسي.

2 أكتب العدد المركب $\dfrac{Z_A}{Z_C}$ على الشكلين الجبري والأسي.

3 استنتج القيم المضبوطة لكل من $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

4 عين Γ مجموعة النقط $M(z)$ التي تحقق: $\arg\left(\dfrac{z-Z_A}{z-Z_B}\right)=\pi+2k\pi$.

5 نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ: $u_n=Z_A^n+Z_B^n$.

(أ) أثبت أن العدد u_n حقيقي مهما تكن قيمة n.

(ب) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_n=2^{\frac{3n+2}{2}}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

(ج) برهن أن المتتالية (u_n) تحقق العلاقة التراجعية: $u_{n+2}-2\sqrt{2}u_{n+1}+8u_n=0$.

(د) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_{n+6}=512u_n$.

www.dzexams.com Subscribe

التمرين 4 (7 نقطة)

I) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}dt$$

1 بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ وعين دالتها المشتقة $f'(x)$.

2 استنتج إشارة $f'(x)$ حسب قيم x، ثم حدد اتجاه تغير الدالة f.

3 باستخدام المكاملة بالتجزئة، برهن أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا: $f(x)=1-\frac{1+\ln x}{x}$.

II) ليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 أحسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ وفسر النتيجة هندسياً.

2 أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ واستنتج وجود مستقيم مقارب أفقي (Δ) للمنحنى (C_f) يطلب تعيين معادلته.

3 أحسب $f(1)$، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

4 استنتج إشارة $f(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

5 أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ).

6 أنشئ المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f).

III) نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ: $h(x)=f(\ln x)$.

1 أدرس اتجاه تغير الدالة h .

2 أحسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} h(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.

3 شكل جدول تغيرات الدالة h.

إنتهى الموضوع الثاني

www.dzexams.com

من إعداد الأستاذ :مزروح يوسف

الموضوع الأول

حل التمرين 1 ★★★★

I) المعادلات الديوفانتية في $\mathbb{Z}^2$:

1 أ) تعيين الحل الخاص $(x_0;y_0)$: 0.5 ن

لدينا الشرط $y_0 = x_0 + 1 \Longrightarrow y_0 - x_0 = 1$.

بتعويض هذا الشرط في المعادلة (E):

$$\begin{aligned} 67x_0 - 3(x_0+1) &= 317 \\ 67x_0 - 3x_0 - 3 &= 317 \\ 64x_0 &= 320 \\ x_0 &= \frac{320}{64} = 5 \end{aligned}$$

ومنه $y_0 = 5 + 1 = 6$.

إذن الثنائية الخاصة هي: $(5;6)$.

ب) استنتاج حلول المعادلة (E): 0.5 ن

لدينا الجملة التالية:

$$\begin{cases} 67x - 3y = 317 \dots (1) \\ 67(5) - 3(6) = 317 \dots (2) \end{cases}$$

بطرح المعادلة (2) من المعادلة (1) طرفاً لطرف، نجد:

$$67(x-5) - 3(y-6) = 0 \Longrightarrow 67(x-5) = 3(y-6)$$

بما أن 3 أولي مع 67 $(3 \wedge 67 = 1)$ وحسب مبرهنة غوص، فإن 3 يقسم $(x-5)$.

إذن يوجد عدد صحيح k بحيث: $x = 3k + 5 \Longrightarrow x - 5 = 3k$.

بالتعويض في المساواة السابقة نجد:

$$67(3k) = 3(y-6) \Longrightarrow 67k = y - 6 \Longrightarrow y = 67k + 6$$

إذن، مجموعة حلول المعادلة (E) هي:

$$S = \{(3k+5;67k+6) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

2 **أ) تعيين القيم الممكنة للعدد d:** 0.5 ن

لدينا $d = \text{PGCD}(x;y)$، إذن d يقسم x و d يقسم y.

حسب خواص القاسم المشترك الأكبر، فإن d يقسم $67x - 3y$.

ومنه d يقسم 317.

بما أن 317 عدد أولي (لأنه لا يقبل القسمة على الأعداد الأولية الأقل من جذره $\sqrt{317} \approx 17.8$ وهي $2,3,5,7,11,13,17$)، فإن قواسمه الموجبة هي 1 و 317.

إذن القيم الممكنة للعدد d هي: $\{1;317\}$.

ب) تعيين الثنائيات $(x;y)$ التي من أجلها يكون $d = 317$: 0.75 ن

يكون $d = 317$ إذا وفقط إذا كان $x \equiv 0[317]$ و $y \equiv 0[317]$.

نأخذ $x \equiv 0[317]$، ولدينا $x = 3k + 5$:

$$\begin{aligned} 3k + 5 &\equiv 0[317] \\ 3k &\equiv -5[317] \\ 3k &\equiv -5 + 317[317] \\ 3k &\equiv 312[317] \end{aligned}$$

بما أن $\text{PGCD}(3;317) = 1$، نقسم الطرفين على 3:

$k \equiv 104[317] \implies k = 317\alpha + 104$ حيث $\alpha \in \mathbb{Z}$.

نعوض قيمة k في عبارتي x و y:

$$x = 3(317\alpha + 104) + 5 = 951\alpha + 312 + 5 = 951\alpha + 317$$

$$y = 67(317\alpha + 104) + 6 = 21239\alpha + 6968 + 6 = 21239\alpha + 6974$$

إذن الثنائيات المطلوبة هي: $(951\alpha + 317; 21239\alpha + 6974)$ مع $\alpha \in \mathbb{Z}$.

II) أنظمة التعداد:

1 **تعيين قيمتي α و β:** 0.75 ن

نلاحظ أن الثنائية $(\alpha;\beta)$ هي حل للمعادلة $(E) : 67\alpha - 3\beta = 317$.

من الجزء السابق، وجدنا أن الحلول هي من الشكل: $(3k + 5; 67k + 6)$.

بما أن N مكتوب في النظامين ذي الأساس 7 و 8، وجب تحقيق شروط التعداد:

- من الأساس 7: $1 \leq \alpha \leq 6$ و $0 \leq \beta \leq 6$.
- من الأساس 8: $0 \leq \alpha \leq 7$ و $0 \leq \beta \leq 6 \implies 0 \leq \beta + 1 \leq 7$.

بالتعويض بقيم k في الحل العام:

- من أجل $k = 0$: نجد $\alpha = 3(0) + 5 = 5$ و $\beta = 67(0) + 6 = 6$.

نلاحظ أن القيمتين $\alpha = 5$ و $\beta = 6$ تحققان تماماً شروط التعداد $(1 \leq 5 \leq 6$ و $0 \leq 6 \leq 6)$.

بينما من أجل أي قيمة أخرى لـ k، ستخرج قيم α أو β عن المجال المطلوب.

إذن: $\alpha = 5$ و $\beta = 6$.

www.dzexams.com here Click

2 كتابة العدد N في النظام العشري: 0.25 ن

نعوض قيمتي α و β في إحدى العبارتين:

$$N = 343(5) + 49(6) + 17$$
$$N = 1715 + 294 + 17$$
$$N = 2026$$

III) الموافقات والمجاميع:

1 دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 7: 0.5 ن

$$3^0 \equiv 1[7]$$
$$3^1 \equiv 3[7]$$
$$3^2 \equiv 2[7]$$
$$3^3 \equiv 6[7]$$
$$3^4 \equiv 4[7]$$
$$3^5 \equiv 5[7]$$
$$3^6 \equiv 1[7]$$

نلاحظ أن البواقي تتكرر بشكل دوري، ودورها هو 6.

$n \equiv \ldots[6]$	0	1	2	3	4	5
$3^n \equiv \ldots[7]$	1	3	2	6	4	5

2 تعيين قيم n حتى يكون $A_n \equiv 0[7]$: 0.5 ن

$$2026 = 7 \times 289 + 3 \implies 2026 \equiv 3[7]$$
$$2025 = 7 \times 289 + 2 \implies 2025 \equiv 2[7]$$

ومنه:

$$A_n = 2026^{6n+2} + 4 \times 2025^{3n} + n$$
$$A_n \equiv 3^{6n+2} + 4 \times 2^{3n} + n[7]$$
$$A_n \equiv (3^6)^n \times 3^2 + 4 \times (2^3)^n + n[7]$$

بما أن $3^6 \equiv 1[7]$ و $2^3 = 8 \equiv 1[7]$، فإن:

$$A_n \equiv 1^n \times 9 + 4 \times 1^n + n[7]$$
$$A_n \equiv 9 + 4 + n[7]$$
$$A_n \equiv 13 + n[7]$$
$$A_n \equiv 6 + n[7]$$

لكي يكون $A_n \equiv 0[7]$ يجب أن:

$$6+n \equiv 0[7]$$
$$n \equiv -6[7]$$
$$n \equiv 1[7]$$

إذن: $n = 7k+1$ حيث $k \in \mathbb{N}$.

3 **المجموع S_n:**

أ) تبيان أن $2025S_n = 2026^{n+1} - 1$: 0.25 ن

المجموع S_n هو مجموع لحدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها $q = 2026$ وحدها الأول $2026^0 = 1$.
عدد الحدود هو $(n-0+1) = n+1$.

$$S_n = 1 \times \frac{2026^{n+1}-1}{2026-1}$$
$$S_n = \frac{2026^{n+1}-1}{2025}$$

بضرب الطرفين في 2025 نجد: $2025S_n = 2026^{n+1} - 1$.

ب) استنتاج أن $S_n \equiv 4(3^{n+1}-1)[7]$: 0.25 ن

لدينا مما سبق $2025 \equiv 2[7]$ و $2026 \equiv 3[7]$. نعوض في العلاقة:

$$2S_n \equiv 3^{n+1} - 1[7]$$

للتخلص من المعامل 2، نضرب طرفي الموافقة في العدد 4 (لأن $4 \times 2 = 8 \equiv 1[7]$):

$$4 \times 2S_n \equiv 4(3^{n+1}-1)[7]$$
$$8S_n \equiv 4(3^{n+1}-1)[7]$$
$$S_n \equiv 4(3^{n+1}-1)[7]$$

ج) تعيين قيم n حتى يكون $S_n \equiv 0[7]$: 0.25 ن

$$S_n \equiv 0[7] \implies 4(3^{n+1}-1) \equiv 0[7]$$

بما أن $\text{PGCD}(4;7) = 1$، فإن حسب مبرهنة غوص:

$$3^{n+1} - 1 \equiv 0[7]$$
$$3^{n+1} \equiv 1[7]$$

من جدول البواقي في السؤال (1)، نجد أن القوة التي توافق 1 بتردد 7 هي من مضاعفات 6.

$$n+1 = 6k \quad (k \in \mathbb{N}^*)$$
$$n = 6k-1$$

إذن، قيم العدد الطبيعي n هي $n = 6k - 1$ مع $k \in \mathbb{N}^*$

حل التمرين 2 ★★★★

1 **احتمال أن يكون صفوان رئيسًا للجنة:** 0.5 ن

عدد الحالات الكلية لاختيار اللجنة (رئيس ثم نائبان) هو $10 \times C_9^2 = 360$. لتثبيت صفوان رئيسًا، نختار النائبين من بين الـ 9 أشخاص المتبقين:

$$\text{Card}(A) = 1 \times C_9^2 = 36$$

الاحتمال هو:

$$P(A) = \frac{36}{360} = \frac{1}{10}$$

2 **تبيان أن احتمال أن تكون صونيا نائبة في اللجنة هو $\frac{1}{5}$:** 0.5 ن

تكون صونيا نائبة إذا اخترنا رئيسًا من بين التسعة المتبقين (غير صونيا)، ثم اخترنا صونيا كواحدة من النائبين، والنائب الآخر من الـ 8 الباقين:

$$\text{Card}(B) = 9 \times (C_1^1 \times C_8^1) = 9 \times 8 = 72$$

الاحتمال هو:

$$P(B) = \frac{72}{360} = \frac{1}{5}$$

3 **احتمال أن تضم اللجنة صفوان وصونيا معًا:** 0.5 ن

نحسب الحالات التي يتواجد فيها صفوان وصونيا معًا بشكل مباشر:

- صفوان رئيس وصونيا نائبة والنائب الآخر من الـ 8 الباقين: $1 \times 1 \times 8 = 8$ حالات.
- صونيا رئيسة وصفوان نائب والنائب الآخر من الـ 8 الباقين: $1 \times 1 \times 8 = 8$ حالات.
- الرئيس شخص آخر (8 خيارات) والنائبان هما صفوان وصونيا: $8 \times 1 = 8$ حالات.

$$\text{Card}(C) = 8 + 8 + 8 = 24$$

الاحتمال هو:

$$P(C) = \frac{24}{360} = \frac{1}{15}$$

4 **المتغير العشوائي X (عدد النساء في اللجنة):**

(أ) **قيم X الممكنة:** 0.25 ن

بما أن اللجنة تضم 3 أعضاء والنساء عددهن 4، فإن: $X \in \{0,1,2,3\}$

(ب) **قانون احتمال X وحساب الأمل الرياضياتي:** 1 ن

- $P(X=0) = \frac{6 \times C_5^2}{360} = \frac{60}{360} = \frac{1}{6}$

www.dzexams.com here Click

- $P(X=1)=\dfrac{(4\times C_6^2)+(6\times C_4^1\times C_5^1)}{360}=\dfrac{60+120}{360}=\dfrac{1}{2}$
- $P(X=2)=\dfrac{(4\times C_3^1\times C_6^1)+(6\times C_4^2)}{360}=\dfrac{72+36}{360}=\dfrac{3}{10}$
- $P(X=3)=\dfrac{4\times C_3^2}{360}=\dfrac{12}{360}=\dfrac{1}{30}$

جدول قانون الاحتمال:

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$p_0=\frac{1}{6}$	$p_1=\frac{1}{2}$	$p_2=\frac{3}{10}$	$p_3=\frac{1}{30}$

الأمل الرياضياتي $E(X)$:

$$E(X)=\left(0\times\frac{1}{6}\right)+\left(1\times\frac{1}{2}\right)+\left(2\times\frac{3}{10}\right)+\left(3\times\frac{1}{30}\right)=1.2$$

5 الجزء الثاني:

(أ) تبيان عبارة P_n: 0.75 ن

العدد الإجمالي $n+10$ شخص (الرجال $n+6$ والنساء 4). نختار شخصين في آن واحد:

$$\text{Card}(\Omega')=C_{n+10}^2=\frac{(n+10)(n+9)}{2}$$

الحصول على شخصين من نفس الجنس (رجلان أو امرأتان):

$$\text{Card}=C_{n+6}^2+C_4^2=\frac{(n+6)(n+5)}{2}+6=\frac{(n+6)(n+5)+12}{2}$$

$$P_n=\frac{\frac{(n+6)(n+5)+12}{2}}{\frac{(n+10)(n+9)}{2}}=\frac{(n+6)(n+5)+12}{(n+10)(n+9)}$$

(ب) تعيين قيمة n حتى يكون $P_n=\dfrac{7}{13}$: 0.5 ن

بحل المعادلة: $13(n^2+11n+42)=7(n^2+19n+90)$

$$13n^2+143n+546=7n^2+133n+630\implies 6n^2+10n-84=0$$

بالتبسيط: $3n^2+5n-42=0$. المميز $\Delta=529=23^2$. الجذر الطبيعي الوحيد المقبول هو:

$$n=\frac{-5+23}{6}=3$$

حل التمرين 3 ★★★★

1 (أ) حل المعادلة (E): 0.75 ن

نحسب المميّز Δ:

$$\Delta=(-2\sqrt{2})^2-4(1)(4)=8-16=-8$$

www.dzexams.com here Click

بما أن $\Delta < 0$ فإن المعادلة تقبل حلين مركبين مترافقين:

$$z = \frac{2\sqrt{2} \pm i\sqrt{8}}{2} = \frac{2\sqrt{2} \pm 2i\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \pm i\sqrt{2}$$

بما أن z_1 جزؤه التخيلي موجب نجد: $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ و $z_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$

(ب) **الشكل الأسي للعدد $\frac{z_1}{z_2}$:** 0.5 ن

لدينا $|z_1| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$. وعمدته $\arg(z_1) = \frac{\pi}{4}$ لأن $\cos\theta = \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ إذن
$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ و $z_2 = \overline{z_1} = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4})} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

(ج) **قيم n الطبيعية حتى يكون $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقياً:** 0.25 ن

لدينا $\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^n = e^{i\frac{n\pi}{2}}$. يكون العدد حقيقياً إذا وفقط إذا كان الجزء التخيلي معدوماً، أي: $\frac{n\pi}{2} = k\pi \implies n = 2k \quad (k \in \mathbb{N})$
إذن n عدد طبيعي زوجي.

2 (أ) **لاحقة النقطة C:** 0.5 ن

باستخدام عبارة التحاكي $h(\Omega, -3)$:

$$\begin{aligned} z_C - z_\Omega &= -3(z_B - z_\Omega) \\ z_C &= -3\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= -3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\sqrt{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= -\frac{3\sqrt{2}}{2} + 3i\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= -\sqrt{2} + 3i\sqrt{2} \end{aligned}$$

(ب) **لاحقة النقطة D:** 0.5 ن

باستخدام عبارة الدوران $R\left(O, -\frac{\pi}{2}\right)$:

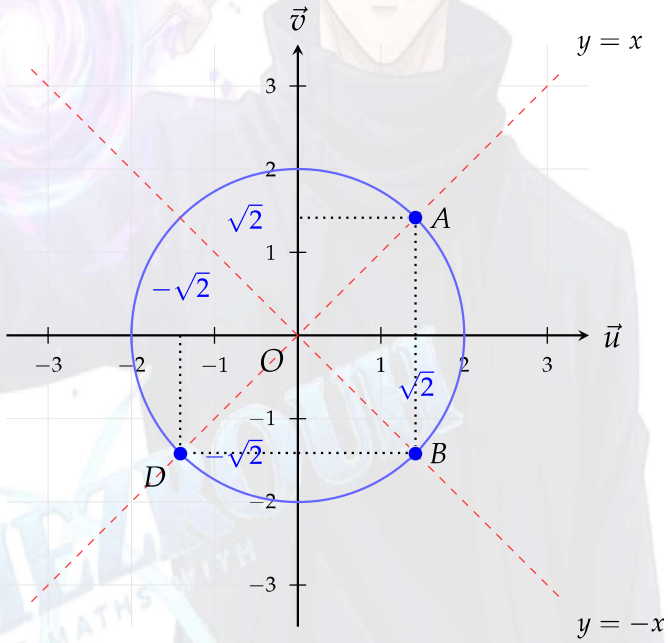
$$\begin{aligned} z_D &= e^{-i\frac{\pi}{2}} z_B \\ &= -i(\sqrt{2} - i\sqrt{2}) \\ &= -i\sqrt{2} + i^2\sqrt{2} \\ &= -\sqrt{2} - i\sqrt{2} \end{aligned}$$

3 **تمثيل النقاط (الإنشاء الهندسي المضبوط):** 0.5 ن

لتمثيل النقاط بدقة دون اللجوء للقيم التقريبية، نعتمد على الخواص الهندسية:

- لدينا $|z_A| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$. وبالمثل نجد أن $|z_B| = |z_D| = 2$. إذن النقاط A و B و D تنتمي جميعها إلى الدائرة $(\mathcal{C})$ التي مركزها المبدأ O ونصف قطرها $R = 2$.

- إحداثيات $A(\sqrt{2},\sqrt{2})$ تحقق المعادلة $y=x$. إذن A هي نقطة تقاطع الدائرة $(\mathcal{C})$ مع المنصف الأول (في الربع الأول).
- إحداثيات $B(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ تحقق المعادلة $y=-x$. إذن B هي نقطة تقاطع الدائرة $(\mathcal{C})$ مع المنصف الثاني (في الربع الرابع).
- إحداثيات $D(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ تحقق المعادلة $y=x$. إذن D هي نقطة تقاطع الدائرة $(\mathcal{C})$ مع المنصف الأول (في الربع الثالث).



4 **الشكل الجبري للنسبة وتفسيرها:** 0.5 ن

$$\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}=\frac{(-2\sqrt{2}+2i\sqrt{2})}{-2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}}=\frac{-1+i}{-1-i}=\frac{(-1+i)^2}{2}=\frac{-2i}{2}=-i$$

بما أن النسبة هي $-i$ فإن $AC=AD \iff \left|\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}\right|=1$ و $(\vec{AD},\vec{AC})=-\frac{\pi}{2} \iff \arg(-i)=-\frac{\pi}{2}$.

إذن المثلث ACD قائم ومتساوي الساقين في A.

5 **طبيعة الرباعي $ACED$:** 0.25 ن

بما أن I منتصف $[CD]$ و E نظيرة A بالنسبة إلى I فإن القطرين $[CD]$ و $[AE]$ متناصفان، فالرباعي متوازي أضلاع. وبما أن فيه زاوية قائمة (A) وضلعان متجاوران متساويان $(AC=AD)$، فهو مربع.

6 **مجموعة النقاط M:** 0.25 ن

$$2\arg(z-z_\Omega)=\frac{\pi}{4}+2k\pi \iff \arg((z-z_\Omega)^2)=\frac{\pi}{4}+2k\pi \text{ أي } \arg(z-z_\Omega)=\frac{\pi}{8}+k\pi.$$

المجموعة هي المستقيم الذي يشمل Ω باستثناء Ω وميله $m=\tan(\frac{\pi}{8})$.

إذن، مجموعة النقاط M هي المستقيم الذي يشمل Ω باستثناء النقطة Ω وميله $m=\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

www.dzexams.com here Click

I) دراسة الدالة المساعدة g_n:

1 اتجاه تغير الدالة g_n وجدول تغيراتها: 0.5 ن

الدالة g_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g_n(x)=nx+e^x$ هي مجموع دالتين قابليتن للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

من أجل كل $x\in\mathbb{R}$، المشتقة هي: $g_n'(x)=n+e^x$.

بما أن $n\in\mathbb{N}^*$ (أي $n\geq 1$) وأن الدالة الأسية موجبة تماماً $(e^x>0)$، فإن مجموع مقدارين موجبين تماماً هو مقدار موجب تماماً.

إذن $g_n'(x)>0$ من أجل كل عدد حقيقي x.

ومنه، الدالة g_n **متزايدة تماماً** على $\mathbb{R}$.

حساب النهايات:

$\lim\limits_{x\to-\infty} g_n(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(nx+e^x)=-\infty$ (لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} nx=-\infty$).

$\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(nx+e^x)=+\infty$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		$+\infty$
$g_n'(x)$		$+$	
$g_n(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

2 البرهان أن المعادلة $g_n(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α_n: 0.5 ن

الدالة g_n مستمرة ومتزايدة تماماً على $\mathbb{R}$.

صورة المجال $]-\infty;+\infty[$ بالدالة g_n هي المجال $]-\infty;+\infty[$.

بما أن العدد $0\in]-\infty;+\infty[$، فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $g_n(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α_n في $\mathbb{R}$.

التحقق من أن $-1<\alpha_n<0$:

نحسب صوري العددين 0 و -1 بالدالة g_n:

$g_n(0)=n(0)+e^0=1 \implies g_n(0)>0$.

$g_n(-1)=n(-1)+e^{-1}=-n+\frac{1}{e}$.

بما أن $n\geq 1$ و $\frac{1}{e}\approx 0.36$، فإن $g_n(-1)<0 \implies -n+\frac{1}{e}<0$.

بما أن $g_n(-1)\times g_n(0)<0$، فإن $-1<\alpha_n<0$.

3 استنتاج إشارة $g_n(x)$: 0.25 ن

x	$-\infty$		α_n		$+\infty$
$g_n(x)$		$-$	0	$+$	

www.dzexams.com here Click

II) دراسة الدالة f_n:

1 **حساب النهاية عند $-\infty$ والتفسير الهندسي:** 0.5 ن

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(x-1)e^x}{n+e^x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{xe^x - e^x}{n+e^x}$.

نعلم من التزايد المقارن أن $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

بالتعويض نجد أن البسط يؤول إلى 0 والمقام يؤول إلى $n+0=n$.

إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = \dfrac{0}{n} = 0$.

التفسير الهندسي: المنحنى (C_n) يقبل مستقيماً مقارباً أفقياً معادلته $y=0$ (وهو محور الفواصل) بجوار $-\infty$.

2 **أ- حساب النهاية عند $+\infty$:** 0.25 ن

في حالة التعويض المباشر نجد حالة عدم تعيين من الشكل $\dfrac{+\infty}{+\infty}$.

نستخرج e^x كعامل مشترك من المقام للاختزال مع البسط:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x-1)e^x}{e^x\left(\frac{n}{e^x}+1\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{\frac{n}{e^x}+1}$.

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{n}{e^x} = 0$، فإن النهاية تؤول إلى $\dfrac{+\infty}{1} = +\infty$.

ب- حساب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}[f_n(x)-(x-1)]$ والاستنتاج: 0.25 ن

نقوم بتوحيد المقامات:

$f_n(x)-(x-1) = \dfrac{(x-1)e^x}{n+e^x} - \dfrac{(x-1)(n+e^x)}{n+e^x} = \dfrac{(x-1)e^x - n(x-1) - (x-1)e^x}{n+e^x}$.

بعد اختزال الحدود المتعاكسة يتبقى لدينا: $\dfrac{-n(x-1)}{n+e^x}$.

نحسب النهاية عند $+\infty$ باستخراج x من البسط و e^x من المقام:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-nx\left(1-\frac{1}{x}\right)}{e^x\left(\frac{n}{e^x}+1\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-n}{\frac{e^x}{x}} \times \dfrac{1-\frac{1}{x}}{\frac{n}{e^x}+1}$.

نعلم أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$، ومنه $\dfrac{-n}{+\infty} = 0$. إذن النهاية هي 0.

الاستنتاج: المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x-1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_n) بجوار $+\infty$.

جـ- دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_n) والمستقيم (Δ): 0.25 ن

ندرس إشارة الفرق المتبقي: $f_n(x)-(x-1) = \dfrac{-n(x-1)}{n+e^x}$.

المقام $n+e^x$ موجب تماماً من أجل كل $x \in \mathbb{R}$.

بما أن $n>0$ فإن إشارة الكسر تعتمد على إشارة البسط وتحديداً إشارة القوس $-(x-1) = -x+1$.

ينعدم الفرق عند $x=1$. من أجل $x<1$ يكون المقدار موجباً، ومن أجل $x>1$ يكون المقدار سالباً.

www.dzexams.com here Click

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)-(\Delta)$		$+$	0	$-$	
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)		(C_f) يقطع (Δ) في $A(1;f(1))$		(C_f) تحت (Δ)

3 أ- **تبيان أن** $f'_n(x)=\dfrac{e^x\cdot g_n(x)}{(n+e^x)^2}$: 0.5 ن

الدالة f_n قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث:

$$\begin{aligned}f'_n(x)&=\frac{[e^x+(x-1)e^x](n+e^x)-e^x(x-1)e^x}{(n+e^x)^2}\\&=\frac{xe^x(n+e^x)-(x-1)e^{2x}}{(n+e^x)^2}\\&=\frac{nxe^x+xe^{2x}-xe^{2x}+e^{2x}}{(n+e^x)^2}\\&=\frac{nxe^x+e^{2x}}{(n+e^x)^2}=\frac{e^x(nx+e^x)}{(n+e^x)^2}\end{aligned}$$

وبما أن $g_n(x)=nx+e^x$ فإن:

$$f'_n(x)=\frac{e^x\cdot g_n(x)}{(n+e^x)^2}$$

ب- **استنتاج اتجاه تغير الدالة** f_n **وجدول تغيراتها:** 0.5 ن

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x، المقدار $e^x>0$ والمقام $(n+e^x)^2>0$.

ومنه إشارة المشتقة $f'_n(x)$ هي نفس إشارة الدالة المساعدة $g_n(x)$.

حسب الجزء (I)، $g_n(x)$ سالبة على المجال $]-\infty;\alpha_n[$ وموجبة على $]\alpha_n;+\infty[$.

إذن، الدالة f_n متناقصة تماماً على $]-\infty;\alpha_n]$ ومتزايدة تماماً على $[\alpha_n;+\infty[$.

x	$-\infty$		α_n		$+\infty$
$f'_n(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	0	↘	$f_n(\alpha_n)$	↗	$+\infty$

4 **تبيين أن** $f_n(\alpha_n)=\alpha_n$: 0.25 ن

لدينا $g_n(\alpha_n)=0$ ومنه $n\alpha_n+e^{\alpha_n}=0$ أي: $e^{\alpha_n}=-n\alpha_n$.

www.dzexams.com here Click

بالتعويض في عبارة الدالة نجد:

$$\begin{aligned} f_n(\alpha_n) &= \frac{(\alpha_n-1)e^{\alpha_n}}{n+e^{\alpha_n}} \\ &= \frac{(\alpha_n-1)(-n\alpha_n)}{n-n\alpha_n} \\ &= \frac{-n\alpha_n(\alpha_n-1)}{n(1-\alpha_n)} \\ &= \frac{-n\alpha_n(\alpha_n-1)}{-n(\alpha_n-1)} \end{aligned}$$

إذن النتيجة النهائية هي:

$$f_n(\alpha_n) = \alpha_n$$

5 **دراسة الوضع النسبي للمنحنيين** (C_n) **و** (C_{n+1})**:** 0.5 ن

ندرس إشارة الفرق $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ كالتالي:

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) - f_n(x) &= \frac{(x-1)e^x}{n+1+e^x} - \frac{(x-1)e^x}{n+e^x} \\ &= (x-1)e^x\left[\frac{(n+e^x)-(n+1+e^x)}{(n+1+e^x)(n+e^x)}\right] \\ &= \frac{-(x-1)e^x}{(n+1+e^x)(n+e^x)} \end{aligned}$$

بما أن $e^x > 0$ والمقامات موجبة تماماً، فإن إشارة الفرق من إشارة $-(x-1)$.

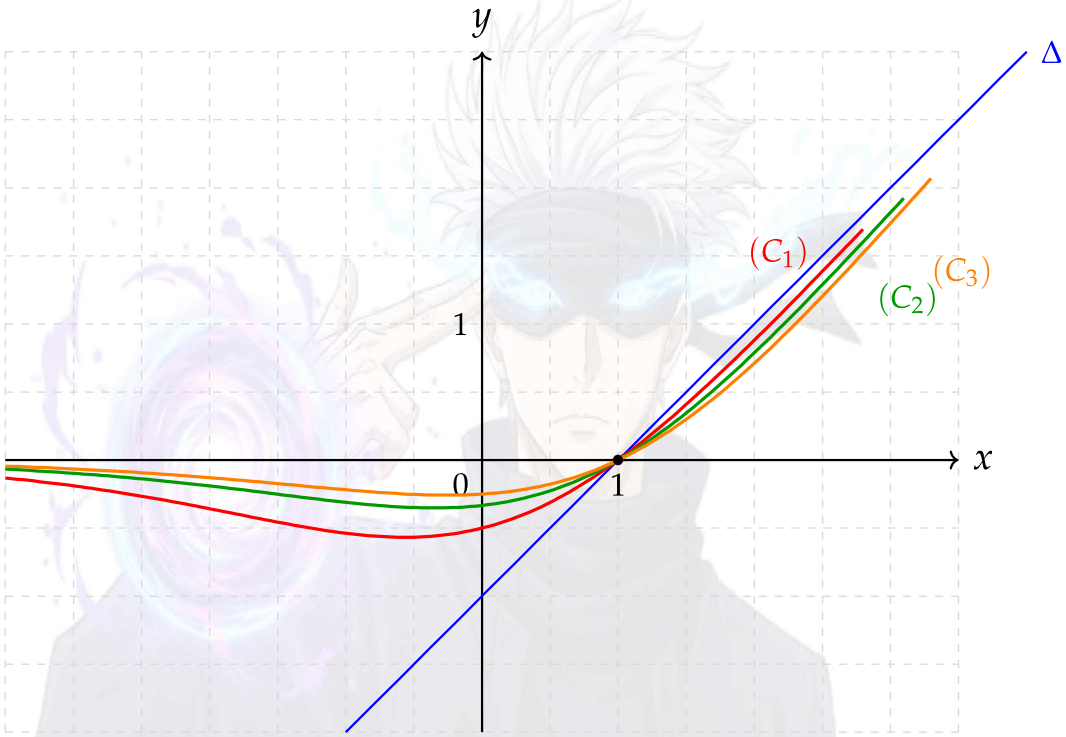
x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)-(C_{n+1})$		$+$	0	$-$	
الوضعية		(C_f) تحت (C_{n+1})	(C_f) يقطع (C_{n+1}) في $A(1;f(1))$	(C_{n+1}) فوق (C_f)	

6 **إنشاء** (Δ)**،** (C_1)**،** (C_2) **و** (C_3)**:** 1 ن

ملاحظات للرسم: جميع المنحنيات تشترك في النقطة $(1,0)$ لأنها نقطة التقاطع مع محور الفواصل والمقارب.

الذروة لكل منحنى تنتمي للمستقيم $y = x$ لأن $f_n(\alpha_n) = \alpha_n$.

www.dzexams.com here Click



III) الحساب التكاملي والمتتاليات:

1 **حساب التكامل I باستخدام المكاملة بالتجزئة:** 0.5 ن

نضع: $u(x) = x-1 \implies u'(x) = 1$ و $v(x) = e^x \implies v'(x) = e^x$.

بتطبيق قانون المكاملة بالتجزئة نجد:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{0} (x-1)e^x dx \\ &= [(x-1)e^x]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} e^x dx \\ &= [(x-1)e^x]_{-1}^{0} - [e^x]_{-1}^{0} \\ &= \left(-1 + 2e^{-1}\right) - \left(1 - e^{-1}\right) \end{aligned}$$

إذن النتيجة النهائية هي:

$$I = \frac{3}{e} - 2$$

2 **تبيان الحصر من أجل كل $x \in [-1;0]$:** 0.25 ن

من أجل كل $x \in [-1;0]$ لدينا $-1 \leq x \leq 0$.

بإدخال الدالة الأسية المتزايدة تماماً: $\frac{1}{e} \leq e^x \leq 1 \implies e^{-1} \leq e^x \leq e^0$.

نضيف العدد الطبيعي n للأطراف: $n + \frac{1}{e} \leq n + e^x \leq n + 1$.

بما أن $\frac{1}{e} > 0$ فإن $n < n + \frac{1}{e}$. إذن المتراجحة تصبح: $n < n + e^x \leq n + 1$.

بما أن الأطراف موجبة تماماً، نقلب ونعكس اتجاه الترتيب:

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n+e^x} < \frac{1}{n}$$

www.dzexams.com here Click

الآن نضرب جميع الأطراف في المقدار $(x-1)e^x$.

بما أن $x \in [-1;0]$ فإن $x-1 \leq -1 < 0$ (أي سالب)، و $e^x > 0$. إذن المقدار $(x-1)e^x$ سالب.

عند الضرب في عدد سالب، تُقلب اتجاهات المتراجحة مرة أخرى لنحصل على:

$$\frac{(x-1)e^x}{n} \leq \frac{(x-1)e^x}{n+e^x} \leq \frac{(x-1)e^x}{n+1}.$$

وهو المطلوب: $\frac{(x-1)e^x}{n} \leq f_n(x) \leq \frac{(x-1)e^x}{n+1}$.

3 **تبيان تقارب المتتالية (u_n) وحساب نهايتها:** 0.25 ن

لدينا الحصر السابق ساري المفعول على المجال $[-1;0]$.

ندخل رمز التكامل المحدود من -1 إلى 0 (بما أن $-1 < 0$ فإن ترتيب الحدود يُحافظ على التراجح):

$$\int_{-1}^{0} \frac{(x-1)e^x}{n}dx \leq \int_{-1}^{0} f_n(x)dx \leq \int_{-1}^{0} \frac{(x-1)e^x}{n+1}dx.$$

باستخراج الثوابت $1/n$ و $1/(n+1)$ من التكامل نجد:

$$\frac{1}{n}\int_{-1}^{0}(x-1)e^x dx \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}\int_{-1}^{0}(x-1)e^x dx.$$

بما أن التكامل المتبقي هو نفسه I المذكور في السؤال الأول، نجد:

$$\frac{I}{n} \leq u_n \leq \frac{I}{n+1}.$$

نحسب نهايات طرفي الحصر عندما $n \to +\infty$:

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I}{n} = 0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I}{n+1} = 0$.

حسب مبرهنة الحصر المتتالية متقاربة ونهايتها هي: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4 **دراسة المجموع V_n:**

أ- **تبيان أن** $\int_{k+1}^{k+2} \frac{1}{t}dt \leq \frac{1}{k+1}$: 0.25 ن

ليكن $k \in \mathbb{N}^*$ و $t \in [k+1;k+2]$.

من المجال لدينا $t \geq k+1$. بقلب الأطراف الموجبة نجد $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{k+1}$.

بمكاملة الطرفين من $k+1$ إلى $k+2$:

$$\int_{k+1}^{k+2} \frac{1}{t}dt \leq \int_{k+1}^{k+2} \frac{1}{k+1}dt \implies \int_{k+1}^{k+2} \frac{1}{t}dt \leq \frac{1}{k+1}[t]_{k+1}^{k+2}.$$

$$\int_{k+1}^{k+2} \frac{1}{t}dt \leq \frac{1}{k+1}(k+2-(k+1)) \implies \int_{k+1}^{k+2} \frac{1}{t}dt \leq \frac{1}{k+1} \times 1.$$

ب- **استنتاج متراجحة المجموع:** 0.25 ن

نأخذ المجموع للأطراف من $k=1$ إلى n:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{k+1}^{k+2} \frac{1}{t}dt\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}.$$

بتطبيق علاقة شال على مجموع التكاملات المتعاقبة:

$$\int_2^3 \frac{1}{t}dt + \int_3^4 \frac{1}{t}dt + \cdots + \int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{t}dt = \int_2^{n+2} \frac{1}{t}dt.$$

نحسب هذا التكامل المتبقي: $\int_2^{n+2} \frac{1}{t}dt = [\ln(t)]_2^{n+2} = \ln(n+2) - \ln 2$.

بترتيب المتراجحة نصل إلى المطلوب: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \geq \ln(n+2) - \ln 2$.

www.dzexams.com here Click

جـ- استنتاج نهاية المجموع V_n: 0.25 ن

من السؤال (3) أثبتنا أن $u_k \leq \frac{I}{k+1}$.

بجمع الأطراف من 1 إلى n نجد: $V_n \leq I\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}$.

نعلم من الفرع (ب) أن المجموع أكبر من أو يساوي $\ln(n+2)-\ln 2$.

ولكن، احذر هنا: الثابت $I=\frac{3}{e}-2$ هو مقدار سالب (لأن $\frac{3}{2.71}\approx 1.1<2$).

عند ضرب المتراجحة $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\geq \ln(n+2)-\ln 2\right)$ في العدد السالب I، ينعكس اتجاهها وتصبح:

$I\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\leq I\left(\ln(n+2)-\ln 2\right)$.

بالتالي، نتحصل على التعدي التالي: $V_n \leq I\left(\ln(n+2)-\ln 2\right)$.

نحسب نهاية الطرف الأكبر: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\ln(n+2)-\ln 2\right)=+\infty$.

وبما أن الثابت $I<0$، فإن جداء عدد سالب في المالانهاية الموجبة يعطي مالانهاية سالبة.

إذن، نهاية المجموع هي $-\infty$

إنتهى الموضوع الأول

www.dzexams.com here Click

الموضوع الثاني

حل التمرين 1 ★★★★

I) دراسة قواسم عبارات بدلالة n:

1 أ) تبيان أن d_n يقسم 7: 0.25 ن

لدينا $d_n = \text{PGCD}(A_n; B_n)$، إذن d_n يقسم A_n و d_n يقسم B_n.

ومنه d_n يقسم الفرق بينهما: $B_n - A_n$.

$B_n - A_n = (2n^2 + 3n + 5) - (2n^2 + 3n - 2) = 7$.

إذن، 7 يقسم d_n.

ب) التحقق من عبارة A_n: 0.5 ن

بنشر العبارة المعطاة:

$$(n+2)(2n-1) = 2n^2 - n + 4n - 2 = 2n^2 + 3n - 2$$

وهي مطابقة لعبارة A_n. إذن: $A_n = (n+2)(2n-1)$.

ج) استنتاج قيم n حتى يكون $d_n = 7$: 0.25 ن

بما أن 7 عدد أولي، فإن $d_n \in \{1;7\}$.

يكون $d_n = 7$ إذا وفقط إذا كان $A_n \equiv 0[7]$ و $B_n \equiv 0[7]$.

بما أن $B_n = A_n + 7$، فإن شرط $B_n \equiv 0[7]$ مُحقق تلقائياً إذا كان $A_n \equiv 0[7]$.

$(n+2)(2n-1) \equiv 0[7] \iff A_n \equiv 0[7]$.

بما أن 7 أولي، إما $n+2 \equiv 0[7]$ أو $2n-1 \equiv 0[7]$.

الحالة 1: $n \equiv 5[7] \implies n+2 \equiv 0[7]$.

الحالة 2: $n \equiv 4[7] \implies 2n \equiv 1 \equiv 8[7] \implies 2n-1 \equiv 0[7]$.

إذن، $d_n = 7$ من أجل $n = 7k+4$ أو $n = 7k+5$ $(k \in \mathbb{N})$.

2 التعبير عن m_n بدلالة n: 0.25 ن

نعلم أن: $m_n \times d_n = A_n \times B_n \implies m_n = \dfrac{A_n \times B_n}{d_n}$.

الحالة الأولى (إذا كان $d_n = 7$):

$$m_n = \frac{(2n^2+3n-2)(2n^2+3n+5)}{7}$$

الحالة الثانية (إذا كان $d_n = 1$):

$$m_n = (2n^2+3n-2)(2n^2+3n+5)$$

II) جملة PGCD و PPCM:

1 تبيان أن d يقسم 273: 0.25 ن

www.dzexams.com here Click

لدينا $m = d \times a' \times b'$ حيث a' و b' أوليان فيما بينهما $(a' \wedge b' = 1)$.
بالتعويض في العلاقة: $d(a'b' - 3) = 273 \implies da'b' - 3d = 273$.
بما أن $(a'b' - 3)$ عدد صحيح، فإن 273 يقسم d.

2 القيم الممكنة للعدد الأولي d: 0.25 ن

نحلل العدد 273 إلى جداء عوامل أولية: $273 = 3 \times 7 \times 13$.
القواسم الأولية للعدد 273 هي $3, 7, 13$.
إذن القيم الممكنة للعدد d هي: $\{3; 7; 13\}$.

3 دراسة الحالة $d = 7$:

أ) تبيان أن $xy = 42$: 0.25 ن

بما أن $d = \text{PGCD}(a; b) = 7$، فإنه يوجد عددان طبيعيان x, y حيث $a = 7x$ و $b = 7y$ مع $\text{PGCD}(x; y) = 1$.
بما أن $a < b$ فإن $x < y$.
بالتعويض في $7(xy - 3) = 273 \implies xy - 3 = \dfrac{273}{7} = 39$.
إذن $xy = 42$. **ب) استنتاج الثنائيات $(a; b)$ الممكنة:** 0.5 ن

نبحث عن الثنائيات $(x; y)$ حيث $xy = 42$، $x < y$، و $\text{PGCD}(x; y) = 1$.
قواسم 42 هي: $1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42$.
الثنائيات المقبولة $(x; y)$ هي: $(1; 42)$، $(2; 21)$، $(3; 14)$، $(6; 7)$.
بضرب كل ثنائية في $d = 7$ نحصل على الثنائيات $(a; b)$:
$(42; 49)$ ، $(21; 98)$ ، $(14; 147)$ ، $(7; 294)$. **ج) التحقق من الثنائية $(A_4; B_4)$:** 0.25 ن

من أجل $n = 4$:
$A_4 = 2(4)^2 + 3(4) - 2 = 32 + 12 - 2 = 42$.
$B_4 = 2(4)^2 + 3(4) + 5 = 32 + 12 + 5 = 49$.
نلاحظ أن $(A_4; B_4) = (42; 49)$، وهي فعلاً إحدى الثنائيات المستنتجة في السؤال السابق.

III) المعادلات الديوفانتية والموافقات:

1 حل المعادلة $(E) : 7x - 6y = 1$ في $\mathbb{Z}^2$: 0.5 ن

لدينا $7x - 6y = 1 \implies 7x \equiv 1[6]$.
بما أن $7 \equiv 1[6]$، فإن الموافقة تصبح: $1x \equiv 1[6]$.
إذن: $x = 6k + 1$ (حيث $k \in \mathbb{Z}$).
بالتعويض في المعادلة الأصلية نجد:

$$\begin{aligned} 7(6k+1) - 6y &= 1 \\ 42k + 7 - 6y &= 1 \\ 6y &= 42k + 6 \\ y &= \frac{42k+6}{6} = 7k + 1 \end{aligned}$$

إذن، مجموعة حلول المعادلة هي:

www.dzexams.com here Click

$S = \{(6k+1;7k+1) \mid k \in \mathbb{Z}\}$

2 **أ) الارتباط بالمعادلة (E):** 0.25 ن

لدينا $N \equiv 3[7] \implies N = 7x+3$ (حيث $x \in \mathbb{N}$).

ولدينا $N \equiv 4[6] \implies N = 6y+4$ (حيث $y \in \mathbb{N}$).

بالمساواة بين العبارتين:

$$7x+3 = 6y+4$$
$$7x-6y = 4-3$$
$$7x-6y = 1$$

وهي بالضبط المعادلة (E). إذن الثنائية $(x;y)$ هي حل للمعادلة (E).

ب) استنتاج أن $N \equiv 10[42]$: 0.25 ن

بما أن الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E)، فقد وجدنا سابقاً أن $x = 6k+1$ (حيث $k \in \mathbb{Z}$).

بالتعويض في عبارة N:

$$N = 7(6k+1)+3$$
$$N = 42k+7+3$$
$$N = 42k+10$$

ومنه نستنتج أن: $N \equiv 10[42]$.

3 **تعيين العدد الطبيعي N:** 0.25 ن

من الجزء الثاني (السؤال 3-ج)، لدينا: $A_4 = 42$ و $B_4 = 49$.

من السؤال السابق وجدنا أن $N \equiv 10[42]$، وهذا يعني وجود عدد طبيعي q بحيث:

$$N = 42q+10$$

بما أن الباقي 10 أصغر تماماً من القاسم 42 $(10 < 42)$، فإن هذه العبارة تُمثل فعلياً القسمة الإقليدية للعدد N على 42 (أي على A_4)، ويكون q هو حاصل القسمة.

حسب معطيات السؤال، حاصل القسمة هو $B_4 - 1$.

$$q = B_4 - 1$$
$$q = 49-1 = 48$$

نعوض قيمة q لنجد العدد N:

$$N = 42(48)+10$$
$$N = 2016+10$$

إذن، العدد المطلوب هو:

$$N = 2026$$

www.dzexams.com here Click

1 البرهان بالتراجع على أن $-1 \leq u_n \leq -\frac{1}{2}$: 1 ن

نعرّف الدالة $f(x) = (x+1)e^x - 1$ حيث $u_{n+1} = f(u_n)$.

أساس التراجع: من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = -\frac{1}{2}$، ومنه $-1 \leq -\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2}$ محققة تماماً.

خطوة التراجع: نفرض أن $-1 \leq u_n \leq -\frac{1}{2}$ صحيحة، ونبرهن أن $-1 \leq u_{n+1} \leq -\frac{1}{2}$ صحيحة أيضاً.

نحسب المشتقة: $f'(x) = (x+2)e^x$. بما أن $x \in [-1, -\frac{1}{2}]$، فإن $f'(x) > 0$ والدالة f متزايدة تماماً.

من فرضية التراجع لدينا: $-1 \leq u_n \leq -\frac{1}{2} \Longrightarrow f(-1) \leq f(u_n) \leq f(-\frac{1}{2})$.

بالحساب نجد $f(-1) = -1$ و $f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2\sqrt{e}} - 1$.

بما أن $-1 < \frac{1}{2\sqrt{e}} - 1 < -\frac{1}{2}$ فإن: $-1 \leq u_{n+1} \leq -\frac{1}{2}$.

إذن حسب مبدأ التراجع، فإنه من أجل كل عدد طبيعي n: $-1 \leq u_n \leq -\frac{1}{2}$.

2 دراسة إشارة $(x+1)(e^x - 1)$ واستنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n): 0.5 ن

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$e^x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)(e^x - 1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

اتجاه تغير المتتالية (u_n): 0.5 ن

نحسب الفرق: $u_{n+1} - u_n = (u_n + 1)(e^{u_n} - 1)$.

بما أن $u_n \in [-1, -\frac{1}{2}]$، فإن u_n يقع في المجال الذي يكون فيه الجداء سالباً (بين -1 و 0).

إذن $u_{n+1} - u_n \leq 0$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماماً.

3 تقارب المتتالية (u_n) وحساب نهايتها: 0.5 ن

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد -1 فهي متقاربة.

نهايتها ℓ تحقق المعادلة $(\ell+1)(e^\ell - 1) = 0$. الحلول الممكنة هي $\ell = -1$ أو $\ell = 0$.

بما أن $u_n \leq -\frac{1}{2}$ فإن النهاية المقبولة هي $\ell = -1$.

4 المتراجحتان واستنتاج النهاية:

المتراجحة الأولى: 0.25 ن

لدينا $1 + u_{n+1} = (1 + u_n)e^{u_n}$.

بما أن $u_n \leq -\frac{1}{2}$ فإن $e^{u_n} \leq e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

ولأن $1 + u_n \geq 0$ نجد: $1 + u_{n+1} \leq \frac{1}{\sqrt{e}}(1 + u_n)$.

www.dzexams.com here Click

المتراجحة الثانية: 0.25 ن

نكتب المتراجحة السابقة من أجل قيم متتابعة لـ n وبالضرب طرفاً إلى طرف:

$$1+u_1 \leq \frac{1}{\sqrt{e}}(1+u_0)$$
$$1+u_2 \leq \frac{1}{\sqrt{e}}(1+u_1)$$
$$\dots$$
$$1+u_n \leq \frac{1}{\sqrt{e}}(1+u_{n-1})$$

بعد الاختزال المتسلسل نجد: $1+u_n \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n (1+u_0)$.

بما أن $1+u_0 = \frac{1}{2}$ فإن: $1+u_n \leq \frac{e^{-n/2}}{2}$.

استنتاج النهاية: 0.25 ن

بما أن $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-n/2}}{2} = 0$ فإنه حسب مبرهنة الحصر نجد $\lim_{n\to+\infty}(1+u_n) = 0$.

ومنه: $\lim_{n\to+\infty} u_n = -1$.

5 **تبيان أن** $S_n = \ln(2u_n+2)$: 0.75 ن

بما أن $e^{u_k} = \frac{1+u_{k+1}}{1+u_k}$ فإن $u_k = \ln(1+u_{k+1}) - \ln(1+u_k)$.

المجموع $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$ يعطي بالتعويض:

$S_n = [\ln(1+u_1) - \ln(1+u_0)] + [\ln(1+u_2) - \ln(1+u_1)] + \dots + [\ln(1+u_n) - \ln(1+u_{n-1})]$.

بملاحظة الاختزال المتتالي يتبقى لنا:

$S_n = \ln(1+u_n) - \ln(1+u_0)$.

بما أن $1+u_0 = \frac{1}{2} \implies u_0 = -\frac{1}{2}$ فإن $-\ln(\frac{1}{2}) = \ln(2)$.

إذن $S_n = \ln(1+u_n) + \ln(2)$ أي: $S_n = \ln(2u_n+2)$.

حل التمرين 3 ★★★☆

الجزء الأول: حل الجملة في $\mathbb{C}$ 1 ن

لدينا الجملة التالية ذات المجهولين α و β:

$$\begin{cases} \alpha+\beta = 2\sqrt{2} & \dots(1) \\ \overline{\alpha}-\overline{\beta} = -2i\sqrt{6} & \dots(2) \end{cases}$$

نبدأ بتبسيط المعادلة (2). بإدخال مرافق طرفي المعادلة واستعمال خاصية أن مرافق المرافق هو العدد نفسه ومرافق المجموع هو مجموع المرافقات نجد:

$$\overline{\overline{\alpha}-\overline{\beta}} = \overline{-2i\sqrt{6}} \implies \alpha-\beta = 2i\sqrt{6} \quad \dots(3)$$

بجمع المعادلتين (1) و (3) طرفاً لطرف نجد:

$$(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta) = 2\sqrt{2}+2i\sqrt{6} \implies 2\alpha = 2\sqrt{2}+2i\sqrt{6}$$

بقسمة الطرفين على 2 نجد النتيجة الأولى:

$$\alpha = \sqrt{2}+i\sqrt{6}$$

www.dzexams.com here Click

بتعويض قيمة α في المعادلة (1) نجد:

$\sqrt{2}+i\sqrt{6}+\beta=2\sqrt{2} \Longrightarrow \beta=2\sqrt{2}-\sqrt{2}-i\sqrt{6}$.

إذن النتيجة الثانية هي:

$$\beta=\sqrt{2}-i\sqrt{6}$$

الجزء الثاني: دراسة الأعداد المركبة والمتتاليات

نعتبر النقط A، B و C التي لواحقها على الترتيب: $Z_A=\sqrt{2}+i\sqrt{6}$ ، $Z_B=\sqrt{2}-i\sqrt{6}$ ، $Z_C=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$.

1 كتابة Z_A و Z_C على الشكل الأسي: 0.5 ن

بالنسبة لـ Z_A: نحسب الطويلة $|Z_A|=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{6})^2}=\sqrt{2+6}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

نبحث عن العمدة θ_A حيث تحقق: $\cos\theta_A=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$ و $\sin\theta_A=\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

إذن $\theta_A=\frac{\pi}{3}+2k\pi \Longrightarrow$

$$Z_A=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$$

بالنسبة لـ Z_C: نحسب الطويلة $|Z_C|=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2+2}=\sqrt{4}=2$.

نبحث عن العمدة θ_C حيث تحقق: $\cos\theta_C=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\sin\theta_C=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

إذن $\theta_C=\frac{\pi}{4}+2k\pi \Longrightarrow$

$$Z_C=2e^{i\frac{\pi}{4}}$$

2 كتابة النسبة $\frac{Z_A}{Z_C}$ على الشكلين الجبري والأسي: 0.5 ن

الشكل الأسي:

بتطبيق خواص الشكل الأسي نجد $\frac{Z_A}{Z_C}=\frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{4}}}=\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}$.

إذن:

$$\frac{Z_A}{Z_C}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

الشكل الجبري:

لدينا $\frac{Z_A}{Z_C}=\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$.

نضرب البسط والمقام في مرافق المقام وهو $\sqrt{2}-i\sqrt{2}$ نجد:

$\frac{Z_A}{Z_C}=\frac{(\sqrt{2}+i\sqrt{6})(\sqrt{2}-i\sqrt{2})}{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=\frac{2-i\sqrt{4}+i\sqrt{12}-i^2\sqrt{12}}{4}$.

بما أن $i^2=-1$ و $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ نجد:

$\frac{Z_A}{Z_C}=\frac{2-2i+2i\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{4}=\frac{2+2\sqrt{3}}{4}+i\frac{2\sqrt{3}-2}{4}$.

بالاختزال على 2 نجد:

$$\frac{Z_A}{Z_C}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

www.dzexams.com here Click

3 استنتاج القيم المضبوطة لـ $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$: 0.5 ن

من الشكل الأسي نستنتج الشكل المثلثي للنسبة: $\frac{Z_A}{Z_C}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$.

بالمطابقة بين الجزأين الحقيقي والتخيلي للشكلين الجبري والمثلثي نجد:

$$\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\Longrightarrow\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

$$\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\Longrightarrow\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

إذن:

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\quad,\quad\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

4 تعيين مجموعة النقط Γ: 0.5 ن

لدينا الشرط $\arg\left(\frac{z-Z_A}{z-Z_B}\right)=\pi+2k\pi$.

هذا الشرط يترجم هندسيا إلى الزاوية الموجهة بين الشعاعين: $(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA})=\pi+2k\pi$.

هذا يعني أن الشعاعين $\overrightarrow{MA}$ و $\overrightarrow{MB}$ مرتبطان خطيا ومتعاكسان في الاتجاه.

وبالتالي النقطة M تنتمي إلى القطعة المستقيمة المفتوحة التي طرفاها A و B.

إذن:

Γ هي القطعة المستقيمة $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B

5 دراسة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

(أ) إثبات أن u_n حقيقي (الحل الذكي): 0.5 ن

نلاحظ أن $Z_A=\sqrt{2}+i\sqrt{6}$ و $Z_B=\sqrt{2}-i\sqrt{6}$ وبالتالي $Z_B=\overline{Z_A}$ ومنه $Z_A=\overline{Z_B}$.

نعلم أن العدد المركب Z يكون حقيقيا إذا وفقط إذا كان $Z=\overline{Z}$.

نحسب مرافق المتتالية u_n: $\overline{u_n}=\overline{Z_A^n+Z_B^n}$.

من خواص المرافق نجد: $\overline{u_n}=(\overline{Z_A})^n+(\overline{Z_B})^n=Z_B^n+Z_A^n=u_n$.

بما أن $\overline{u_n}=u_n$ فإن:

$u_n\in\mathbb{R}$ من أجل كل عدد طبيعي n

(ب) تبيين عبارة u_n: 0.5 ن

باستخدام دستور "دي موافر" لدينا: $Z_A^n=(2\sqrt{2})^n e^{i\frac{n\pi}{3}}=2^{\frac{3n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}\right)$.

وبما أن $Z_B=\overline{Z_A}$ فإن: $Z_B^n=2^{\frac{3n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{3}-i\sin\frac{n\pi}{3}\right)$.

بجمع العبارتين يختزل الجزء التخيلي ونجد: $u_n=2^{\frac{3n}{2}}\left(2\cos\frac{n\pi}{3}\right)$.

بضرب القوى $2^{\frac{3n}{2}}\times 2^1=2^{\frac{3n+2}{2}}$ نجد:

$$u_n=2^{\frac{3n+2}{2}}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

www.dzexams.com here Click

(ج) البرهان على العلاقة التراجعية: 0.5 ن

لدينا المجموع $S = Z_A + Z_B = 2\sqrt{2}$ والجداء $P = Z_A \times Z_B = 8$.

إذن Z_A و Z_B هما حلا المعادلة من الدرجة الثانية: $Z^2 - 2\sqrt{2}Z + 8 = 0 \implies Z^2 - SZ + P = 0$.

بما أن Z_A حل للمعادلة فإنه يحقق: $Z_A^2 - 2\sqrt{2}Z_A + 8 = 0$.

بضرب طرفي المساواة في Z_A^n نجد: $\ldots(*)$ $Z_A^{n+2} - 2\sqrt{2}Z_A^{n+1} + 8Z_A^n = 0$.

وبنفس الطريقة لـ Z_B نجد: $\ldots(**)$ $Z_B^{n+2} - 2\sqrt{2}Z_B^{n+1} + 8Z_B^n = 0$.

بجمع المعادلتين $(*)$ و $(**)$ طرفا لطرف واستخراج المعاملات كعامل مشترك نجد:

$(Z_A^{n+2} + Z_B^{n+2}) - 2\sqrt{2}(Z_A^{n+1} + Z_B^{n+1}) + 8(Z_A^n + Z_B^n) = 0$.

وهو ما يكافئ:

$$u_{n+2} - 2\sqrt{2}u_{n+1} + 8u_n = 0$$

(د) البرهان على العلاقة $u_{n+6} = 512u_n$: 0.5 ن

نحسب أولا Z_A^6: من الشكل الأسي نجد $Z_A^6 = \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^6 e^{i(6\times\frac{\pi}{3})} = 2^9 e^{i2\pi}$.

بما أن $e^{i2\pi} = 1$ و $2^9 = 512$ فإن $Z_A^6 = 512$.

نكتب الآن Z_A^{n+6} على الشكل: $Z_A^{n+6} = Z_A^n \times Z_A^6 = 512Z_A^n$.

وبنفس الطريقة نجد $Z_B^{n+6} = 512Z_B^n$ (لأن $Z_B^6 = \overline{Z_A^6} = \overline{512} = 512$).

بالجمع نجد $u_{n+6} = Z_A^{n+6} + Z_B^{n+6} = 512Z_A^n + 512Z_B^n = 512(Z_A^n + Z_B^n)$.

إذن:

$$u_{n+6} = 512u_n$$

حل التمرين 4 ★★★★

I) دالة معرفة بتكامل:

1 قابلية الاشتقاق وحساب المشتقة: 0.75 ن

الدالة $t \mapsto \frac{\ln t}{t^2}$ مستمرة على المجال $]0;+\infty[$.

إذن، الدالة f المعرفة بالتكامل $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt$ هي الدالة الأصلية لهذه الدالة والتي تنعدم عند $x = 1$.

ومنه، الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ومشتقتها هي:

$$f'(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$

2 إشارة $f'(x)$ واتجاه التغير: 0.5 ن

من أجل كل $x \in]0;+\infty[$، المقام $x^2 > 0$ تماماً، إذن إشارة $f'(x)$ من إشارة $\ln x$.

لدينا $\ln x = 0$ يكافئ $x = 1$.

$\ln x < 0$ من أجل $x \in]0;1[$ و $\ln x > 0$ من أجل $x \in]1;+\infty[$.

وبالتالي، الدالة f متناقصة تماماً على المجال $]0;1]$ ومتزايدة تماماً على المجال $[1;+\infty[$.

3 البرهان باستخدام المكاملة بالتجزئة: 0.75 ن

نضع: $u(t) = \ln t \implies u'(t) = \frac{1}{t}$ و $v'(t) = \frac{1}{t^2} \implies v(t) = -\frac{1}{t}$.

www.dzexams.com here Click

بتطبيق قانون المكاملة بالتجزئة:

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}dt &= \left[-\frac{\ln t}{t}\right]_1^x - \int_1^x \left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t}\right)dt \\ &= -\frac{\ln x}{x} + \int_1^x \frac{1}{t^2}dt \\ &= -\frac{\ln x}{x} + \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x \\ &= -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1 \\ &= 1 - \frac{1+\ln x}{x}\end{aligned}$$

إذن، من أجل كل $x \in]0;+\infty[$: $f(x) = 1 - \dfrac{1+\ln x}{x}$.

II) دراسة الدالة f:

1 **حساب النهاية عند 0 والتفسير الهندسي:** 0.5 ن

$$\begin{aligned}\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) &= \lim_{x \xrightarrow{>} 0}\left(1 - \frac{1+\ln x}{x}\right) \\ &= \lim_{x \xrightarrow{>} 0}\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty\end{aligned}$$

(لأن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$ مسبوقة بإشارة ناقص).

التفسير الهندسي: المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ (محور التراتيب) هو مستقيم مقارب عمودي للمنحنى (C_f).

2 **حساب النهاية عند $+\infty$ واستنتاج المقارب الأفقي:** 0.5 ن

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) = 1$$

(حسب التزايد المقارن $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$).

الاستنتاج: المنحنى (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً أفقياً (Δ) معادلته $y = 1$ بجوار $+\infty$.

3 **حساب $f(1)$ وجدول التغيرات:** 0.5 ن

$f(1) = 1 - \dfrac{1+\ln 1}{1} = 1 - 1 = 0$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	1

www.dzexams.com here Click

4 استنتاج إشارة $f(x)$: 0.5 ن

من جدول التغيرات، الدالة تقبل قيمة حدية صغرى قيمتها 0 عند $x=1$.

ومنه من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ لدينا $f(x)\geq 0$.

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	‖	$+$	0	$+$	

5 دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ): 0.5 ن

ندرس إشارة الفرق $f(x)-1$:

$$f(x)-1=1-\frac{1+\ln x}{x}-1=\frac{-(1+\ln x)}{x}$$

بما أن $x>0$ فإن إشارة الفرق من إشارة $-(1+\ln x)$.

نفرض أن الفرق موجب، أي $f(x)-1>0$، وهذا يتحقق عندما:

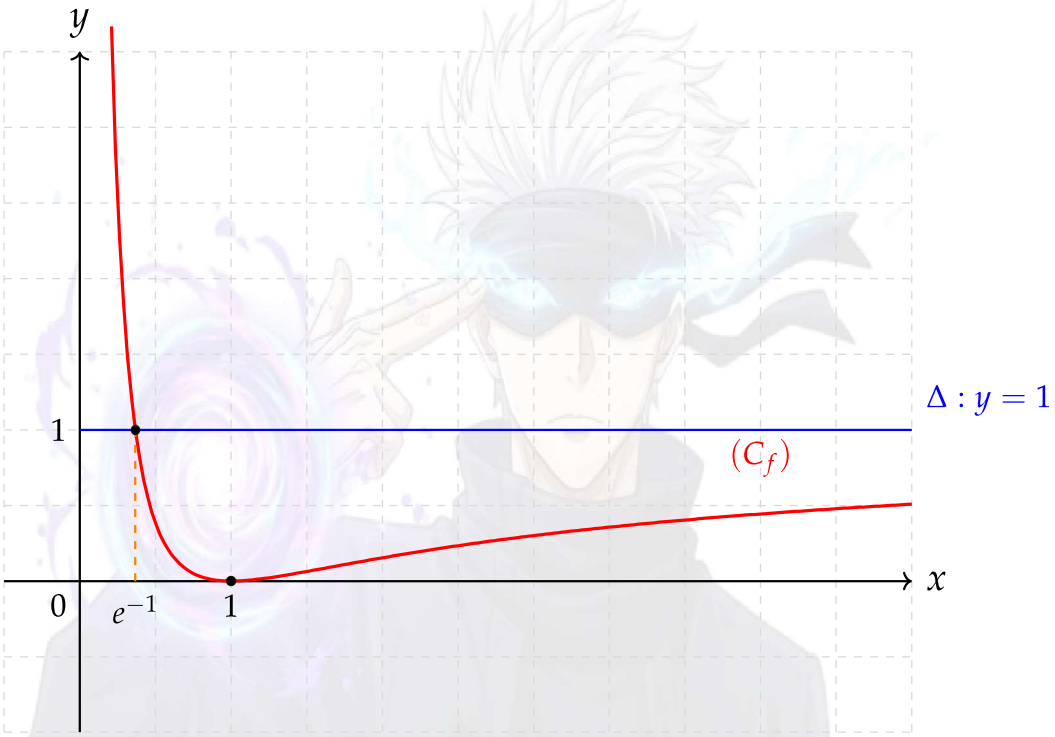
$$-(1+\ln x)>0 \Longleftarrow 1+\ln x<0 \Longleftarrow \ln x<-1 \Longleftarrow x<e^{-1}$$

وعليه، يكون المنحنى فوق المقارب في المجال $]0;e^{-1}[$ وتحته في المجال $]e^{-1};+\infty[$.

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f(x)-(\Delta)$	‖	$+$	0	$-$	
الوضعية	‖	(Δ) فوق (C_f)	(Δ) يقطع (C_f) في $A(e^{-1};f(e^{-1}))$	(Δ) تحت (C_f)	

6 الرسم 1 ن

www.dzexams.com here Click



III) دراسة دالة مركبة $h(x) = f(\ln x)$:

1 **حساب المشتقة $h'(x)$ ودراسة اتجاه التغير:** 0.5 ن

الدالة h قابلة للاشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ ومشتقتها هي:

$$h'(x) = (\ln x)' \cdot f'(\ln x) = \frac{1}{x} f'(\ln x)$$

بما أن $x \in]1;+\infty[$ فإن $\frac{1}{x} > 0$ تماماً.

إذن، إشارة $h'(x)$ هي من نفس إشارة $f'(\ln x)$.

من دراسة الدالة f (في الجزء الأول)، نعلم إشارة $f'(X)$ حيث $X = \ln x$:

- $f'(X) = 0 \iff X = 1 \implies \ln x = 1 \implies x = e$.
- $f'(X) < 0 \iff 0 < X < 1 \implies 0 < \ln x < 1 \implies 1 < x < e$.
- $f'(X) > 0 \iff X > 1 \implies \ln x > 1 \implies x > e$.

ومنه، الدالة h **متناقصة تماماً** على المجال $]1;e]$ و**متزايدة تماماً** على المجال $[e;+\infty[$.

2 **حساب النهايات:** 0.5 ن

- $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} h(x) = \lim\limits_{X \xrightarrow{>} 0} f(X) = +\infty$ (بوضع $X = \ln x$).
- $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{X \to +\infty} f(X) = 1$ (بوضع $X = \ln x$).

3 **جدول تغيرات الدالة h:** 0.5 ن

لدينا القيمة الحدية الصغرى $h(e) = f(\ln e) = f(1) = 0$.

www.dzexams.com here Click

x	1		e		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$h(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	1

إنتهى الموضوع الثاني

www.dzexams.com here Click