



ثانوية أوبينيتر الخاصة

امتحان بكالوريا تجريبي

دورة ماي 2026

الشعبة: رياضيات

المدة: 4 سا ونصف

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي صندوق U على خمس كريات منها: ثلاث كريات تحمل الرقم 2 وكرتان تحملان الرقم 3، ويحتوي صندوق V على خمس كريات منها ثلاث كريات خضراء وكرتان حمراوين.

نعتبر أن كل الكريات متماثلة ولا نميز بينها باللمس.

نسحب عشوائيا كرية واحدة من U ونسجل رقمها، ثم نسحب عشوائيا وفي آن واحد n كرية من الصندوق V ، حيث n هو الرقم الذي تحمله الكرية المسحوبة من U .

نعتبر الحدثين التاليين: A "الكرات المسحوبة خضراء" B "توجد كرية واحدة حمراء من بين الكريات المسحوبة"

$$(1) \text{ بين أن } P(A) = \frac{11}{50}, \text{ ثم أحسب } P(B).$$

(2) أحسب احتمال سحب كرتين حمراوين علما أن رقم الكرية المسحوبة من الصندوق U هو 3.

(3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات الحمراء المسحوبة.

- عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ نضع: $a_n = \underbrace{333 \dots 331}_n$ (مرة الرقم 3)

(1) تحقق أن العددين a_1 و a_2 أوليان.

(2) بين أن من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $3a_n + 7 = 10^{n+1}$

(3) بين أن من أجل كل $k \in \mathbb{N}$: $10^{30k+2} \equiv 7[31]$

(4) بين أن من أجل كل $k \in \mathbb{N}$: $3a_{30k+1} \equiv 0[31]$ ، ثم استنتج أن 31 يقسم a_{30k+1} .

(5) بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، إذا كان $n \equiv 1[30]$ فإن المعادلة $a_n x + 31y = 1$ لا تقبل حولا في $\mathbb{Z}^2$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z-i)(z^2 + 2z + 2) = 0$

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، نعتبر النقاط A, B, C و D لواقعها على الترتيب:

$$Z_D = 1 - 2i \quad Z_C = -1 - i \quad Z_B = 2 \quad Z_A = i$$

- (أ) تحقق أن النقطة D مرجح للجملة المتقلة: $\{(A;1);(B;-1);(C;-1)\}$.
- (ب) أكتب العدد المركب $\frac{Z_D - Z_A}{Z_B - Z_C}$ على الشكل الأسّي ثم فسر النتيجة هندسيا وبرر طبيعة الرباعي $ABDC$.
- (ج) أكتب العدد المركب $-4 + 4i$ على الشكل الأسّي ثم أحسب $(-4 + 4i)^{2026}$.
- (3) من أجل كل نقطة $M(Z)$ من المستوي تختلف عن B نرفق النقطة $M'(Z')$ حيث: $Z' = \frac{iZ - 4 + 2i}{Z - 2}$.
- (أ) تحقق أن: $Z' - i = \frac{-4 + 4i}{Z - 2}$.
- (ب) بين أن: $AM' \times BM = 4\sqrt{2}$ و $k \in \mathbb{Z}$ $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ $\arg(\vec{u}; \overrightarrow{AM'}) + \arg(\vec{u}; \overrightarrow{BM}) =$.
- (4) (γ) هي مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\arg(Z' - i) = \frac{\pi}{4}$. عين طبيعة المجموعة (γ) .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

- I. نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = (2-x)e^x - 1$
- (1) أدرس تغيرات الدالة h .
- (2) أثبت أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث: $1.8 < \alpha < 1.9$ و $-1.2 < \beta < -1.1$ ثم استنتج إشارة $h(x)$ على $\mathbb{R}$.
- II. لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O; \vec{i}; \vec{j})$ حيث:
- $\|\vec{i}\| = 2cm$ و $\|\vec{j}\| = 4cm$.
- (1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.
- (2) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f'(x) = \frac{h(x)}{(e^x - x)^2}$.
ب- أدرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.
- (3) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) - x = \frac{(1-x)(e^x - x - 1)}{e^x - x}$.
ب- استنتج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$.
- (4) أ- أوجد معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 1$.
ب- أنشئ كلا من (Δ) و (T) ثم المنحنى (C_f) . نأخذ $f(\alpha) = 1.19$ و $f(\beta) = -0.47$.
- (5) أحسب بالسنتيمتر مربع مساحة الحيز للمستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 0$ و $x = 1$.
- (6) أ- m وسيط حقيقي، بين أن جميع المستقيمات (Δ_m) ذات المعادلة $y = mx + 1 - m$ تتقاطع في نقطة وحيدة يطلب تعيينها.
ب- ناقش بيانها حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = mx + 1 - m$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

- (1) نعتبر المعادلة $(E): 9x + 4y = 22$ ، ذات المجهولين الصحيحين x و y .
- بين أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $x \equiv 2[4]$ ثم استنتج حلول المعادلة (E) .
- (2) N عدد طبيعي يكتب $\overline{133\alpha\beta3}$ في نظام التعداد ذو الأساس 4، ويكتب $\overline{56\alpha0}$ في نظام التعداد ذو الأساس 7 حيث α و β عداد طبيعيين.
- عين α و β ثم أكتب $N + 144$ في النظام العشري.
- (3) نضع $a = 88n + 22$ و $b = 198n + 44$ حيث n عدد طبيعي.
- أ) بين أن الثنائية $(a; -b)$ حل للمعادلة (E) .
- ب) باستعمال مبرهنة ببزو بين أن العددين $4n + 1$ و $9n + 2$ أوليان فيما بينهما ثم جد $PGCD(a; b)$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n + 2}$.

(1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل عدد طبيعي $n: 1 \leq u_n < 2$.

ب- حدد اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n: v_n = 1 - \frac{2}{u_n}$

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب حساب حدها الأول.

ب- أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

ج- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(3) احسب بدلالة n المجموع: $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n}$

(4) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: |u_{n+1} - 2| \leq \frac{2}{3}|u_n - 2|$

ب- استنتج أنه منه أجل كل عدد طبيعي $n: |u_n - 2| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(1) عين العددين المركبين z_1 و z_2 حيث:
$$\begin{cases} 2z_1 + iz_2 = 1 + i\sqrt{3} \\ (\sqrt{3} + 2i)z_1 - z_2 = (1 - \sqrt{3})i \end{cases}$$

(2) في المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين:

$$z_B = 2 + \sqrt{3} + i \text{ و } z_A = 1 - i$$

أ- أكتب العدد z_A على الشكل الأسّي.

ب- بين أن: $\frac{z_B}{z_A} = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، ثم استنتج الشكل الأسّي للعدد z_B .

(3) أ- عين لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه المبدأ O وزاويته $-\frac{\pi}{6}$.

ب- عين مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث: $\arg[(z - z_B)^2] = \arg(z_B) - \arg(z_D)$.

(4) لتكن النقطة C ذات اللاحقة $z_C = 1 + i$ ، عين طبيعة المثلث ABC ، ثم استنتج بدقة طبيعة الرباعي $ACBD$.

(5) ليكن التحويل النقطي S المعروف كما يلي: $S = r \circ h$ مع h تحاكي مركزه O ونسبته -2 .
أ- عين طبيعة التحويل S مع تعيين عناصره المميزة.

ب- نعرف من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ ، التحويل H_n كما يلي: $H_n = \underbrace{S \circ S \circ \dots \circ S}_n$ (n مرة)

- عين قيم n حتى يكون H_n تحاكي يطلب تعيين عناصره المميزة.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I. لتكن g دالة عددية معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = -(\ln x)^2 + 2\ln x$

، (C_g) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس

$(O; \vec{i}; \vec{j})$ و (Δ) مستقيم معادلته: $y = -3x$ ، β فاصلة نقطة تقاطع (Δ)

و (C_g) والنقطة A فاصلتها e كما هو موضح في الشكل.

- بقراءة بيانية حدد وضعية (C_g) بالنسبة إلى (Δ) ، ثم استنتج إشارة

$h(x)$ حيث: $h(x) = g(x) + 3x$ على المجال $]0; +\infty[$.

II. f دالة معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = 3\ln x + \frac{(\ln x)^2}{x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم

متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

(1) بين أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ وفسر النتيجة هندسيا، ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) أ- بين أنه من أجل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$.

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أ- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما 1 والآخر α حيث: $0.3 < \alpha < 0.4$.

ب- تأكد أن: $\ln(\alpha) = -3\alpha$

(4) أنشئ (C_f) على المجال $]0; 5]$. نأخذ $\beta \in]0.5; 1.2[$ و $f(\beta) \in]-1.2; 5.3[$ و $f(5) \in]5.3; 5.3[$

(5) أ- باستعمال المكاملة بالتجزئة، عين دالة أصلية للدالة $\ln x \mapsto x$ والتي تنعدم من أجل $x = e$.

ب- بين أن مساحة الحيز المستوي A_α المحدد بـ (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $y = 0$ ، $x = \alpha$ و $x = 1$ هي:

$$A_\alpha = (-9\alpha^3 - 9\alpha^2 - 3\alpha + 3)u.a$$

التصحيح النموذجي

الموضوع الأول

التمرين الأول:

$$P(B) = \frac{30}{50} , P(A) = \frac{11}{50} \quad (1)$$

(2) نضع: R: " سحب كريتين حمراوين " و C: " سحب كرية من الصندوق U تحمل الرقم 3 "

$$P_R(C) = \frac{P(C \cap R)}{P(R)} = \frac{2}{11}$$

$$X(\Omega) = \{0;1;2\} \quad (3)$$

$$P(X=2) = \frac{9}{50} , P(X=1) = \frac{30}{50} , P(X=0) = \frac{11}{50}$$

$$E(X) = \frac{48}{50}$$

التمرين الثاني:

(1) $a_1 = 31$ عدد أولي ، $a_2 = 331$ لا يقبل القسمة على الأعداد الأولية التي مربعها أصغر منه أي 2,3,5,7,11,13,17 إذن فهو عدد أولي

$$3a_n + 7 = 10^{n+1} \text{ ومنه } a_n = \frac{10^{n+1} - 7}{3} \text{ ومنه } a_n = 1 + 3 \times 10 + 3 \times 10^2 + \dots + 3 \times 10^n \quad (2)$$

$$10^{30k+2} \equiv 7[31] \quad (3)$$

$$a_{30k+1} \equiv 0[31] \text{ حسب ميرهنه غوص: } 3a_{30k+1} \equiv 0[31] \quad (4)$$

$$\square^2 \text{ فإن } PGCD(a_{30k+1}; 31) = 1 , n = 30k + 1 \text{ تقبل حولا في } a_n x + 31y = 1 \quad (5)$$

التمرين الثالث:

$$S = \{i; -1-i; -1+i\} \quad (1)$$

$$Z_A - Z_B - Z_C = Z_D \quad (2)$$

$$\text{بـ } \frac{Z_D - Z_A}{Z_B - Z_C} = e^{-i\frac{\pi}{2}} , (BC) \perp (AD) , BC = AD \text{ } ABDC \text{ مربع}$$

$$Z' - i = \frac{-4 + 4i}{Z - 2} \quad (3)$$

$$\text{بـ } |Z' - i| = AM' , |-4 + 4i| = 4\sqrt{2} , |Z - 2| = BM \text{ ومنه: } AM' \times BM = 4\sqrt{2}$$

$$\arg\left(\frac{-4 + 4i}{Z - 2}\right) = \arg(-4 + 4i) - \arg(Z - 2) , \arg(Z' - i) = (\vec{u}; \overrightarrow{AM'})$$

$$(\vec{u}; \overrightarrow{AM'}) + (\vec{u}; \overrightarrow{BM}) = \frac{3\pi}{4} \text{ ومنه}$$

(4) مجموعة النقط M هي: نصف المستقيم الموازي لحامل محور الترتيب ماعدا النقطة B

التمرين الرابع:

ا. 1) تغيرات الدالة h :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$$

من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $h'(x) = (1-x)e^x$

h متزايدة تماما على المجال $]-\infty; 1]$ ومتناقصة تماما على المجال $[1; +\infty[$

2) مبرهنة القيم المتوسطة

إشارة $h(x)$: $h(x) > 0$ على المجال $] \beta; \alpha[$ ، $h(x) < 0$ على المجالين $]-\infty; \beta[$ و $] \alpha; +\infty[$

$$h(\alpha) = h(\beta) = 0$$

ا. 1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ ، (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لمحور الترتيب معادلتيهما $y = 0$ و

$$y = 1$$

$$(2) \text{ أ- من أجل كل } x \in \mathbb{R} : f'(x) = \frac{h(x)}{(e^x - x)^2} > 0$$

ب- الدالة f متزايدة تماما على المجال $[\alpha; \beta]$ ومتناقصة تماما على المجالين $]-\infty; \beta]$ و $[\alpha; +\infty[$

جدول تغيرات الدالة f

$$(3) \text{ أ- } f(x) - x = \frac{(1-x)(e^x - x - 1)}{e^x - x}$$

ب- (C_f) يقع أعلى (Δ) على المجالين $]-\infty; 0[$ و $]0; 1[$ ويقع أسفل (Δ) على المجال $]1; +\infty[$

(Δ) يمس المنحنى (C_f) في النقطة $O(0;0)$ ويقطع (C_f) في النقطة $A(1;1)$

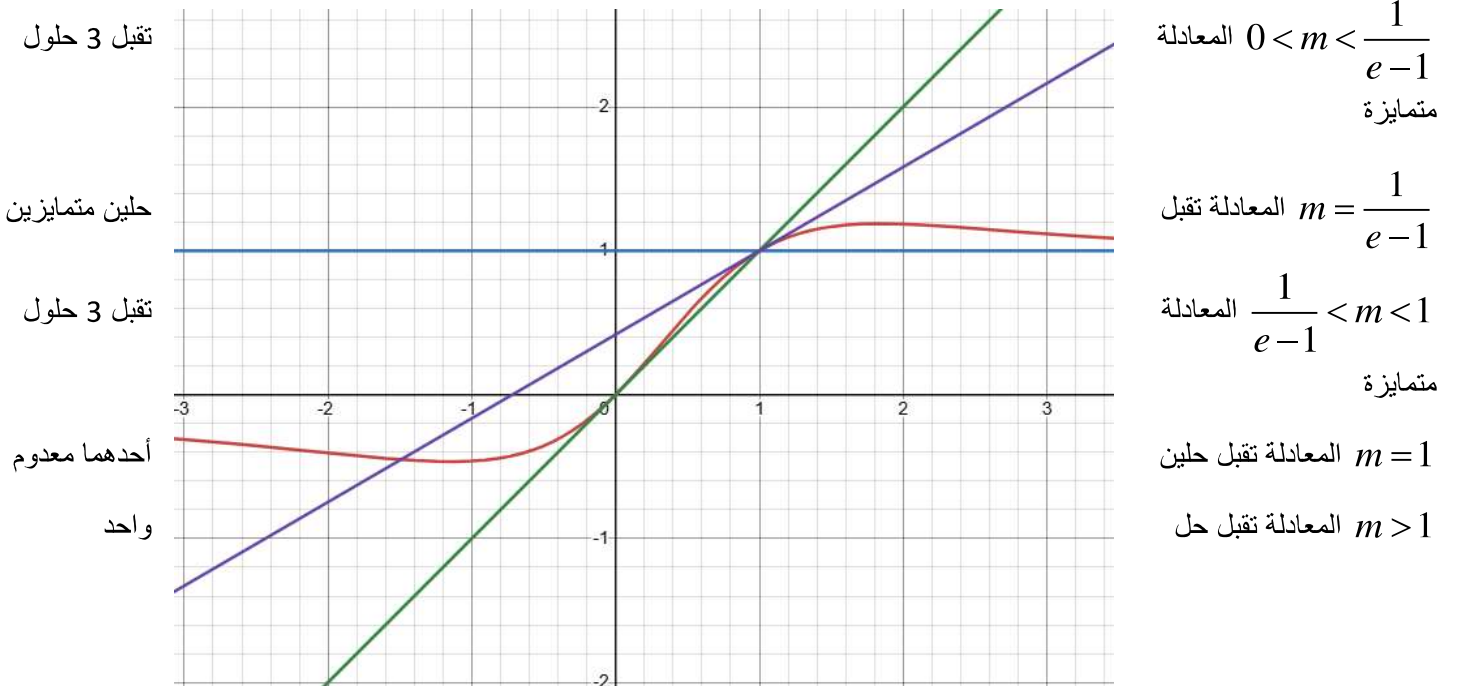
$$(4) \text{ أ- } (T): y = \left(\frac{1}{e-1}\right)x + \frac{e-2}{e-1}$$

ب- الرسم

$$A = 8 \int_0^1 (f(x) - x) dx = (8 \ln(e-1) - 4) cm^2 \quad (5)$$

6) أ- المستقيمات (Δ_m) تشمل جميعها النقطة $\omega(1;1)$ مهما كان $m \in \mathbb{R}$

ب- $m \leq 0$ المعادلة تقبل حل واحد



الموضوع الثاني

التمرين الأول:

$$(1) \quad 9x + 4y = 22 \text{ يكافئ } x \equiv 2[4] \text{ ومنه } x = 4k + 2 \text{ و } y = 1 - 9k \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

$$(2) \quad N = 1987 + 4\beta + 16\alpha \text{ و } N = 7\alpha + 2009 \text{ ومنه } 9\alpha + 4\beta = 22 \text{ حيث } 0 \leq \alpha \leq 3 \text{ و } 0 \leq \beta \leq 3 \text{ ومنه } \alpha = 2 \text{ و } \beta = 1 \text{ ومنه } N + 144 = 2167$$

$$(3) \quad 9a + 4(-b) = 22 \text{ أ-}$$

$$\text{ب- } (-4)(9n + 2) + (9)(4n + 1) = 1 \text{ أي } \text{pgcd}(9n + 2; 4n + 1) = 1 \text{ و } a = 22(4n + 1) \text{ و } b = 22(9n + 2) \text{ ومنه } \text{pgcd}(a; b) = 22$$

التمرين الثاني:

$$(1) \quad \text{أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي } n : 1 \leq u_n < 2$$

$$\text{ب- من أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n(u_n - 2)}{u_n + 2} > 0 \text{ و } u_{n+1} - u_n > 0 \text{ متزايدة تماما } (u_n)$$

(u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بـ 1 فهي متقاربة

$$(2) - \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n : v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n \text{ و } v_0 = -1$$

$$\text{بـ من أجل كل عدد طبيعي } n : v_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n , u_n = \frac{2}{1 + \frac{1}{2^n}}$$

$$\text{جـ } \lim u_n = 2$$

$$(3) S_n = \frac{1}{2}n + \frac{3}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$(4) u_{n+1} - 2 = \frac{2}{u_n + 2}(u_n - 2) \text{ ومنه } 0 < \frac{1}{2}(u_n - 2) < u_{n+1} - 2 \leq \frac{2}{3}(u_n - 2) \text{ ومنه } |u_{n+1} - 2| \leq \frac{2}{3}|u_n - 2|$$

$$\text{ومنه } |u_n - 2| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ ومنه } \lim u_n = 2.$$

التمرين الثالث:

$$(1) z_2 = 2 + \sqrt{3} + i , z_1 = 1 - i$$

$$(2) z_A = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{ أـ}$$

$$\text{بـ } z_B = (\sqrt{2} + \sqrt{6})e^{i\frac{\pi}{12}} \text{ ومنه } \frac{z_B}{z_A} = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$(3) z_D = 2 + \sqrt{3} + i \text{ أـ}$$

بـ مجموعة النقط M هي مستقيم حيث $(\vec{u}; \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{12} + k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$ يصنع زاوية $\frac{\pi}{12}$ مع حامل محور الفواصل ماعدا النقطة

B

$$(4) AC^2 + BC^2 = AB^2 \text{ حسب نظرية فيثاغورس العكسية، المثلث } ABC \text{ قائم في } C$$

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC} \text{ ومنه } ACBD \text{ مستطيل}$$

$$(5) \text{ أـ } S \text{ تشابه مباشر مركزه } O \text{ نسبته } 2 \text{ وزاويته } \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{بـ } H_n : Z' = 2^n e^{\frac{5\pi n i}{12}} , H_n \text{ تحاكي من أجل } n = 6k' \text{ مع } k' \in \mathbb{Z}^*$$

التمرين الرابع:

١. بقراءة بيانية نستنتج أن : $h(x) < 0$ من أجل $x \in]0; \beta[$ و $h(x) > 0$ من أجل $x \in]\beta; +\infty[$ و $h(\beta) = 0$

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ يقبل مستقيم مقارب معادلته $x = 0$.

2) أ- من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ لدينا $f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$

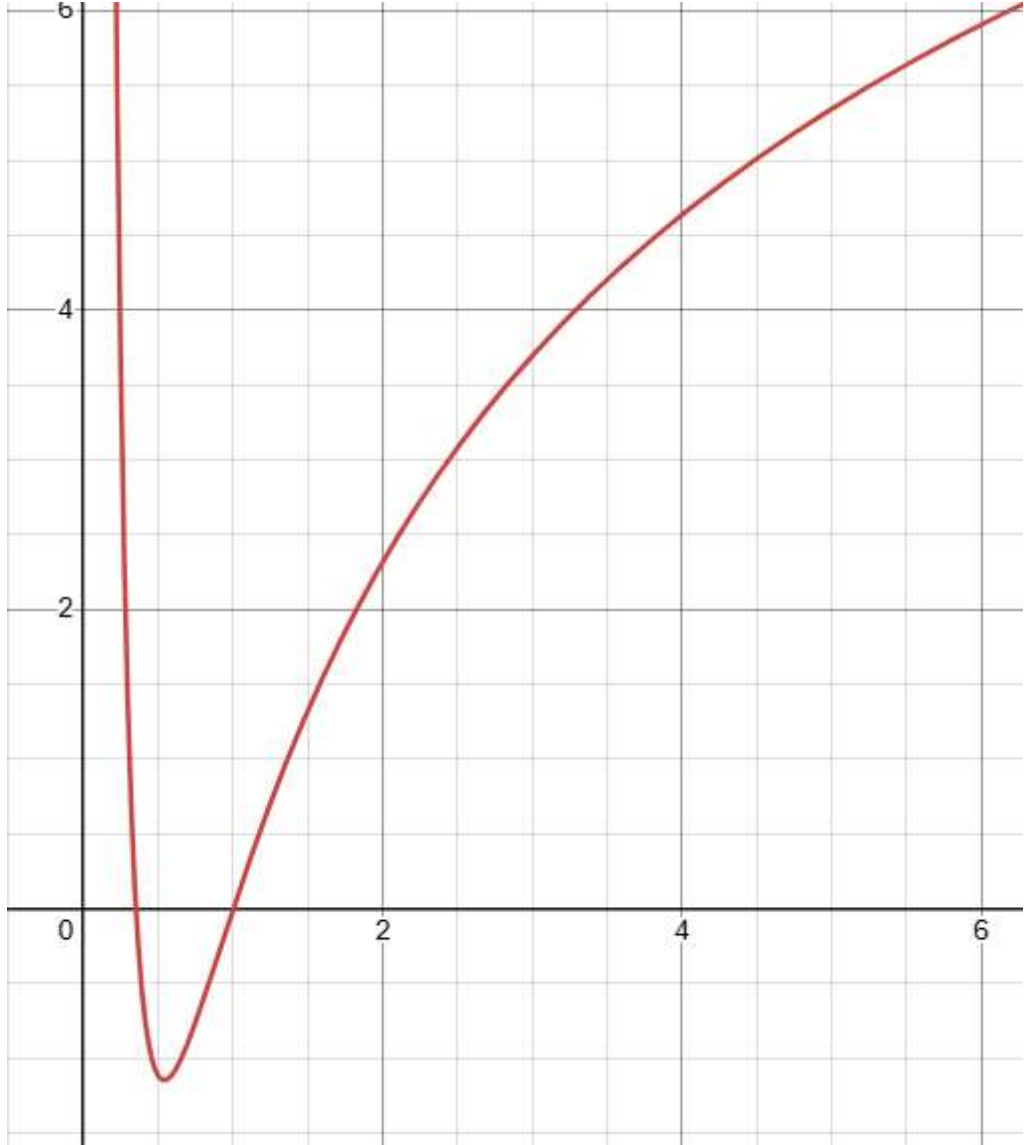
ب- الدالة f متناقصة تماما على المجال $]0; \beta[$ و متزايدة تماما على المجال $]\beta; +\infty[$

جدول تغيرات الدالة f

3) أ- $f(1) = 0$ و $f(\alpha) = 0$ (مبرهنة القيم المتوسطة)

ب- $\ln(\alpha) = -3\alpha$

4) الرسم:



$$\int_e^x \ln(t) dt = x \ln x - x^{-1} \quad (5)$$

$$A_\alpha = -\int_\alpha^1 f(x) dx = (-9\alpha^3 - 9\alpha^2 - 3\alpha + 3)(u.a) \quad \rightarrow$$