



المستوى الثالثة ثانوي شعبة رياضيات

فرض الفصل الثاني في مادة الرياضيات

2سا

التمرين الأول :

f, g, h و k دوال معرفة على المجال $+\infty[; 1$ كما يلي:

$$k(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \text{ و } h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, g(x) = \frac{x}{(x-1)^4}, f(x) = \frac{x}{(x-4)^4} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$(1) \text{ بين أنه من أجل كل } x > 1 \text{ فإن: } g(x) = \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^4}.$$

$$(2) \text{ استنتج عبارة } G(x) \text{ حيث } G \text{ دالة أصلية للدالة } g \text{ على المجال } +\infty[; 1].$$

$$(3) \text{ أحسب } k'(x) \text{ من أجل كل } x \text{ من المجال } +\infty[; 1].$$

$$(4) \text{ عين دالة أصلية للدالة } h \text{ على المجال } +\infty[; 1].$$

$$(5) \text{ أوجد دالة أصلية } F \text{ للدالة } f \text{ على المجال } +\infty[; 1].$$

$$(6) \text{ استنتج الدالة الأصلية للدالة } f \text{ على المجال } +\infty[; 1 \text{ والتي تنعدم عند } 2.$$

التمرين الثاني :

$$(u_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ: } u_n = \int_0^1 (1-x)^n e^x dx$$

$$(1) \text{ أحسب } u_0 \text{ ثم باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب } u_1.$$

$$(2) \text{ أ) بين أن المتتالية } (u_n) \text{ متناقصة.}$$

$$\text{ب) بين أنه من أجل كل } n \text{ عدد طبيعي: } 0 \leq u_n \leq e - 1.$$

$$\text{ج) استنتج أن المتتالية } (u_n) \text{ متقاربة.}$$

$$\text{د) بين أنه من أجل كل } n \text{ عدد طبيعي: } \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{e}{n+1}, \text{ ثم استنتج نهاية المتتالية } (u_n).$$

$$(3) \text{ باستعمال التكامل بالتجزئة، بين أنه من أجل كل } n \text{ عدد طبيعي، } u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$$

$$\text{ثم استنتج قيمة } u_2.$$

4) نعتبر العدد A الحقيقي المعرف بـ : $A = \int_0^1 (2x^2 - 3x + 1)e^x dx$

(أ) عين العددان الحقيقيان α و β حيث، من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$2x^2 - 3x + 1 = \alpha(x - 1)^2 + \beta(x - 1)$$

(ب) استنتج القيمة المضبوطة للعدد A .

التصحيح النموذجي

التمرين الأول :

(1) نبين أنه من أجل كل $x > 1$ فإن: $g(x) = \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^4}$:

لدينا من أجل كل $x > 1$: $g(x) = \frac{x-1+1}{(x-1)^4} = \frac{x}{(x-1)^4}$ وهو المطلوب.

(2) استنتاج عبارة $G(x)$ حيث G دالة أصلية للدالة g على المجال $]1; +\infty[$:

الدالة g مستمرة على المجال $]1; +\infty[$ فهي تقبل دالة أصلية: $G(x) = -\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{3(x-1)^3} + c$

مع c ثابت حقيقي

(3) حساب $k'(x)$: $k'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

(4) تعيين دالة أصلية للدالة h على المجال $]1; +\infty[$:

من السؤال السابق نلاحظ أنه من أجل كل $x > 1$ فإن: $k'(x) = h(x)$ ومنه الدالة k أصلية للدالة h أي :

$H(x) = k(x) + c'$ مع c' ثابت حقيقي

(5) تعيين دالة أصلية F للدالة f على المجال $]1; +\infty[$: نلاحظ أن الدالة f تكتب من الشكل :

$f(x) = g(x) + h(x)$ وعليه $F(x) = G(x) + k(x) + c''$ مع c'' ثابت حقيقي ومنه :

$$F(x) = -\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{3(x-1)^3} + \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + c''$$

$$F(x) = -\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{3(x-1)^3} + \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + \frac{5}{6} - \ln(2 + \sqrt{3}) \quad (6)$$

التمرين الثاني :

$$(1) u_1 = e - 2 \text{ و } u_0 = e - 1$$

$$(2) u_{n+1} - u_n = \int_0^1 -x(1-x)^n e^x dx \text{ (أ) ومنه } u_{n+1} - u_n \leq 0$$

(u_n) متناقصة.

(ب) من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq e - 1$

ج) (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة.

د) من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{e}{n+1}$ ، $\lim(u_n) = 0$

3) بالمكاملة بالتجزئة نجد : $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$ و $u_2 = 2e - 5$

4) $\alpha = 2$ ، $\beta = 1$ ومنه $2x^2 - 3x + 1 = 2(x-1)^2 + x - 1 = 2(1-x)^2 - (1-x)$

ب) القيمة المضبوطة للعدد A هي : $A = 2u_2 - u_1 = 3e - 8$.