3 علوم تجريبية	السنة الدراسية 2025 – 2026

فرض الفصل الثاني في مادة الرياضيات

المدة : 1 سا

التمرين 01 : (05 ن)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \dfrac{6+6u_n}{5+u_n}$

1) تحقق أنه: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = 6 - \dfrac{24}{5+u_n}$

2) أ) برهن بالتراجع أنه: من أجل كل عدد طبيعي n، $0 \le u_n \le 3$

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \dfrac{u_n+2}{u_n-3}$

أ) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{8}{3}$ ثم اكتب عبارة v_n بدلالة n

ب) بين أنه: من أجل عدد طبيعي n، $u_n = 3 - \dfrac{5}{\left(\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{8}{3}\right)^n + 1}$ ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4) احسب المجموع S_n بدلالة n حيث: $S_n = v_0 + 3\times v_1 + 3^2 \times v_2 + \ldots + 3^n \times v_n$

التمرين 02 : (05 ن)

المتتالية العددية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = 2 - n$.

1) بين أن المتتالية (u_n) حسابية يطلب تعيين أساسها r وحدها الأول u_0.

2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = \dfrac{-n^2+3n+4}{2}$

ب- عين قيمة العدد الطبيعي n حيث: $S_n = -126753$

3) المتتالية العددية (v_n) حدودها موجبة تماما ومن أجل عدد طبيعي n : $u_n = \ln(v_n)$

- أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها e^{-1}.

الإجابة النموذجية

التمرين 01:

1) من أجل كل n عدد طبيعي لدينا: $u_{n+1}=\dfrac{6+6u_n}{5+u_n}=\dfrac{6(5+u_n)-24}{5+u_n}=6-\dfrac{24}{5+u_n}$ وهو المطلوب

2) أ- $P(n)$ الخاصية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $P(n):0\le u_n\le 3$

من أجل $n=0$ لدينا $u_0=0$ و $0\le 0\le 3$ إذن $0\le u_0\le 3$ ومنه $P(0)$ صحيحة.....(*)

نفرض صحة $P(n)$ من أجل n عدد طبيعي كيفي و نبرهن صحة $P(n+1)$

لدينا من أجل n كيفي : $0\le u_n\le 3$ ومنه $5\le 5+u_n\le 8$ ومنه $\dfrac{1}{8}\le\dfrac{1}{5+u_n}\le\dfrac{1}{5}$ ومنه

$\dfrac{-24}{8}\le\dfrac{-24}{5+u_n}\le\dfrac{-24}{5}$ ومنه $6-\dfrac{24}{8}\le 6-\dfrac{24}{5+u_n}\le 6-\dfrac{24}{5}$ ومنه $\dfrac{6}{5}\le u_{n+1}\le 3$ بالتعدي

$0\le u_{n+1}\le 3$ $P(n+1)$ صحيحة.....(**)

من (*) و (**) حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من أجل كل n عدد طبيعي $P(n)$ صحيحة

ب- من أجل كل n عدد طبيعي لدينا: $u_{n+1}-u_n=\dfrac{-{u_n}^2+u_n+6}{5+u_n}$ ومن بما أن $0\le u_n\le 3$ فإن

$u_{n+1}-u_n>0$ أي أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما

بما أن المتتالية متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 3 $(u_n\le 3)$ فهي متقاربة.

3) أ- من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}+2}{u_{n+1}-3}=\dfrac{\dfrac{6+6u_n}{5+u_n}+2}{\dfrac{6+6u_n}{5+u_n}-3}=\dfrac{8u_n+16}{3u_n-9}$ ومنه:

$v_{n+1}=\dfrac{8}{3}\left(\dfrac{u_n+2}{u_n-3}\right)=\dfrac{8}{3}v_n$ أي أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{8}{3}$ وحدها الأول $v_0=-\dfrac{2}{3}$

من أجل كل n عدد طبيعي لدينا: $v_n=-\frac{2}{3}\left(\frac{8}{3}\right)^n$

ب- من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $v_n=\frac{u_n+2}{u_n-3}=\frac{u_n-3+2+3}{u_n-3}$ ومنه:

$$v_n=\frac{u_n-3}{u_n-3}+\frac{5}{u_n-3}$$

ومنه $v_n=1+\frac{5}{u_n-3}$ ومنه $v_n-1=\frac{5}{u_n-3}$ ومنه $\frac{1}{v_n-1}=\frac{u_n-3}{5}$ ومنه $\frac{5}{v_n-1}=u_n-3$

ومنه $\frac{5}{v_n-1}+3=u_n$ ومنه $u_n=3+\frac{5}{-\frac{2}{3}\left(\frac{8}{3}\right)^n-1}$ ومنه $u_n=3-\frac{5}{\frac{2}{3}\left(\frac{8}{3}\right)^n+1}$ وهو المطلوب

لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{8}{3}\right)^n=+\infty$ لأن $\frac{8}{3}>1$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{\frac{2}{3}\left(\frac{8}{3}\right)^n+1}\right)=0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=3$

4) من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $3^n\times v_n=-\frac{2}{3}\left(\frac{8^n}{3^n}\right)\times 3^n$ ومنه $3^n\times v_n=\left(-\frac{2}{3}\right)8^n$

إذن: $S_n=v_0+3\times v_1+3^2\times v_2+\ldots+3^n\times v_n$ أي

$S_n=-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\times 8^1-\frac{2}{3}\times 8^2+\ldots-\frac{2}{3}\times 8^n$ ومنه $S_n=-\frac{2}{3}\left(1+8+8^2+\ldots+8^n\right)$

ومنه $S_n=-\frac{2}{3}\left(\frac{8^{n+1}-1}{8-1}\right)$ أي $S_n=-\frac{2}{21}\left(8^{n+1}-1\right)$

التمرين 02:

1) من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $u_{n+1}-u_n=-1$، المتتالية (u_n) حسابية أساسها -1 وحدها الأول $u_0=2$

2) أ- من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ ومنه $S_n = \left(\frac{n+1}{2}\right)(u_0 + u_n)$

أي

$S_n = \left(\frac{n+1}{2}\right)(2 + 2 - n)$ أي $S_n = \frac{(n+1)(4-n)}{2}$ أي $S_n = \frac{-n^2 + 3n + 4}{2}$ وهو المطلوب

ب- من أجل n عدد طبيعي لدينا $S_n = -126753$ تكافئ $\frac{-n^2 + 3n + 4}{2} = -126753$ أي

$-n^2 + 3n + 253510 = 0$ ومنه $n = 505$

3) من أجل عدد طبيعي n لدينا: $u_n = \ln(v_n)$ تكافئ $v_n = e^{u_n} = e^{2-n}$

ولدينا $v_{n+1} = e^{-1} v_n$ أي أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها e^{-1} وحدها الأول $v_0 = e^2$