

تمرين 1 (04 نقاط)

I و J العددان الحقيقيان المعرفان كما يلي: $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1} dx$ و $J = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{e^{2x}-1} dx$.

(1) يبين أن $I = \frac{1}{2}(3 \ln 2 - \ln 3)$.

(2) احسب $I - J$ ، واستنتج حساب J.

(3) n عدد طبيعي أكبر تماما من 1، و K_n العدد الحقيقي المعرف بـ: $K_n = \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} e^{-x} \ln(e^{2x}-1) dx$.

(أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة، احسب K_2 .

(ب) احسب بدلالة n، المجموع S_n حيث: $S_n = K_2 + K_3 + \dots + K_n$. (حساب K_n غير مطلوب)

تمرين 2 (07 نقاط)

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_0 = \alpha + 2$ و $u_{n+1} = \frac{(\alpha + 2)u_n}{u_n + 2 - \alpha}$ (α عدد حقيقي يختلف عن -2).

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بـ: $v_n = \frac{u_n}{u_n - 2\alpha}$.

I- في هذا الجزء من التمرين نفرض أن: $\alpha = 1$.

(1) تحقق أن: $u_{n+1} = 3 - \frac{3}{u_n + 1}$ ، ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $2 < u_n < 4$.

(2) يبين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما، ثم استنتج أنها متقاربة.

(3) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = \frac{6}{3 - 3^{-n}}$ ، واستنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(4) اكتب عبارة v_n بدلالة n، ثم عين أصغر عدد طبيعي n يحقق $v_n \geq e^{66}$.

(5) احسب بدلالة n، المجموع S_n حيث: $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n}$.

II- نفرض في هذا الجزء أن: $-2 < \alpha < 0$.

(1) يبين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{2+\alpha}{2-\alpha}$ ، ثم اكتب عبارة v_n بدلالة n و α .

(2) يبين أن $0 < \frac{2+\alpha}{2-\alpha} < 1$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (v_n) واحسب نهايتها.

(3) لكل عدد طبيعي n غير معدوم، نضع: $S'_n = \ln((2-\alpha)v_0) + \ln((2-\alpha)^2 v_1) + \dots + \ln((2-\alpha)^n v_{n-1})$.

احسب بدلالة n و α ، المجموع S'_n .

I- الدالة العددية المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $g(x) = -e^x(e^x + 2x)$.
 (1) احسب $g(0)$ ، و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

(2) احسب $g'(x)$ ، ثم بين أن $g'(x) < 0$ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$.

(3) شكّل جدول تغيرات الدالة g ، واستنتج أن $g(x) + 1 \leq 0$ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$.

II- الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{x}{2} \left(\frac{1-e^x}{1+e^x} \right)$.

ليكن $(\mathcal{C})$ تمثيلها البياني في المستوى المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(-x) = f(x)$. ماذا تستنتج؟ فسّر ذلك بيانيا.

(2) (أ) بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ، و أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) + \frac{x}{2} \right) = 0$.

(ب) ادرس وضعية $(\mathcal{C})$ بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = -\frac{x}{2}$. ماذا يمثل (Δ) ؟

(3) (أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب، $f'(x) = \frac{1+g(x)}{2(1+e^x)^2}$.

(ب) بين أن f متناقصة تماما على $[0; +\infty[$. استنتج اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ثم شكّل جدول تغيراتها.

(4) (أ) بين أن المعادلة $f(x) = -1$ تقبل حلين α و β حيث $2,3 < \alpha < 2,4$. استنتج حصرا للعدد β .

(ب) اكتب معادلة للمستقيم (Δ') المقارب المائل لـ $(\mathcal{C})$ بجوار $-\infty$ ، ثم ارسم (Δ) ، (Δ') و $(\mathcal{C})$.

III- المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = f(u_n) + \frac{u_n}{2}$.

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 0$.

(2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، المتتالية (u_n) متناقصة. استنتج أنها متقاربة.

(3) (أ) بين أنه يوجد عدد حقيقي k من المجال $]0; 1[$ ، حيث من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} \leq k u_n$.

(ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، ثم احسب نهاية المتتالية (u_n) .



تصحيح الفرض للفصل الثاني 2023م

عبد المطلب

تمرين 1:

$$I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1} dx = \frac{1}{2} \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1} dx = \frac{1}{2} \left[\ln(e^{2x}-1) \right]_{\ln 2}^{\ln 3} \quad (1)$$

$$I = \frac{1}{2} (\ln 8 - \ln 3) = \frac{1}{2} (3 \ln 2 - \ln 3) = \ln \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$I - J = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{2x} - e^x}{e^{2x}-1} dx = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x(e^x-1)}{(e^x+1)(e^x-1)} dx \quad (2)$$

$$I - J = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x+1} dx = \left[\ln(e^x+1) \right]_{\ln 2}^{\ln 3}$$

$$I - J = \ln 4 - \ln 3 = \ln \frac{4}{3}$$

$$J = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} \quad \text{و } J = I - \ln \frac{4}{3}$$

$$K_2 = \int_{\ln 2}^{\ln 3} e^{-x} \ln(e^{2x}-1) dx \quad (3)$$

$$\begin{cases} M'(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1} \\ V(x) = -e^{-x} \end{cases} \quad \begin{cases} M(x) = \ln(e^{2x}-1) \\ V'(x) = e^{-x} \end{cases}$$

$$K_2 = \left[-e^{-x} \ln(e^{2x}-1) \right]_{\ln 2}^{\ln 3} + \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{2e^x}{e^{2x}-1} dx$$

$$K_2 = \frac{-\ln 8}{3} + \frac{\ln 3}{2} + 2J = \frac{1}{2} (3 \ln 3 - 4 \ln 2) = \ln \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$S_n = \int_{\ln 2}^{\ln 3} e^{-x} \ln(e^{2x}-1) dx + \int_{\ln 3}^{\ln 4} e^{-x} \ln(e^{2x}-1) dx + \dots + \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} e^{-x} \ln(e^{2x}-1) dx$$

$$S_n = \int_{\ln 2}^{\ln(n+1)} e^{-x} \ln(e^{2x}-1) dx \quad \text{علاقة سلال}$$

$$J_n = \int_{\ln 2}^{\ln(n+1)} \frac{e^x}{e^{2x}-1} dx \quad \text{و } I_n = \int_{\ln 2}^{\ln(n+1)} \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1} dx$$

$$I_n - J_n = \int_{\ln 2}^{\ln(n+1)} \frac{e^x}{e^x+1} dx = \left[\ln(e^x+1) \right]_{\ln 2}^{\ln(n+1)}$$

$$J_n = \left[\frac{1}{2} \ln(e^{2x}-1) - \ln(e^x+1) \right]_{\ln 2}^{\ln(n+1)}$$

$$J_n = \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{e^x-1}{e^x+1} \right) \right]_{\ln 2}^{\ln(n+1)}$$

احساب S_n نستخدم الكاملة بالتجزئة:

$$S_n = \left[-e^{-x} \ln(e^{2x}-1) \right]_{\ln 2}^{\ln(n+1)} + 2J_n$$

$$S_n = \left[-e^{-x} \ln(e^{2x}-1) + \ln \left(\frac{e^x-1}{e^x+1} \right) \right]_{\ln 2}^{\ln(n+1)}$$

$$S_n = -\frac{\ln(n^2+2n)}{n+1} + \ln \left(\frac{n}{n+2} \right) + \frac{3}{2} \ln 3$$

تمرين 2:

$$U_{n+1} = \frac{3U_n}{U_n+1} \quad \text{و} \quad V_n = \frac{U_n}{U_n-2} \quad \text{I}$$

$$U_{n+1} = \frac{3U_n+3-3}{U_n+1} = 3 - \frac{3}{U_n+1} \quad (1)$$

$$2 < U_0 < 4, \quad U_0 = 3, \quad n=0$$

نرضى أن $2 < U_n < 4$ من أجل n كفي، ونبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي $2 < U_{n+1} < 4$.

$$\frac{1}{5} < \frac{1}{U_{n+1}} < \frac{1}{3}; \quad 3 < U_n+1 < 5; \quad 2 < U_n < 4$$

$$2 < 3 - \frac{3}{U_{n+1}} < \frac{12}{5} < 4; \quad -1 < \frac{-3}{U_{n+1}} < -\frac{3}{5}$$

$2 < U_{n+1} < 4$ و صحتها من أجل $n \in \mathbb{N}$ كل n .

$$U_{n+1} - U_n = \frac{3U_n}{U_n+1} - U_n = \frac{-U_n^2+2U_n}{U_n+1} \quad (2)$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{U_n(2-U_n)}{U_n+1} < 0$$

لأن $2 - U_n < 0$ و $U_n > 0$ ، و U_n متناقصة و محدودة من الأسفل فهي متقاربة،

$$(U_0 = \frac{6}{3} = 2) \quad \text{محددة} \quad U_0 = 3; \quad n=0$$

نرضى صحتها من أجل n كفي، ونبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي:

$$U_{n+1} = \frac{6}{3-3^{-n-1}}; \quad U_{n+1} = \frac{3U_n}{U_n+1} = \frac{3(\frac{6}{3-3^{-n}})}{\frac{6}{3-3^{-n}}+1} =$$

$$\frac{3 \times 6}{9-3^{-n}} = \frac{3 \times 6}{3(3-\frac{1}{3^n})} = \frac{6}{3-3^{-n-1}} \quad \text{(محددة)}$$

و صحتها من أجل $n \in \mathbb{N}$ كل n متقاربة.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{6}{3} = 2$$

$$V_n = \frac{U_n}{U_n-2} = \frac{\frac{6}{3-3^{-n}}}{\frac{6}{3-3^{-n}}-2} = \frac{6}{2 \times 3^{-n}} \quad (4)$$

$$V_n = \frac{3}{3^{-n}} = 3^{n+1}$$

$$\ln 3^{n+1} \geq \ln e^{66}, \quad 3^{n+1} \geq e^{66}, \quad V_n \geq e^{66}$$

$$n+1 \geq \frac{66}{\ln 3}; \quad (n+1) \ln 3 \geq 66$$

$$n = 60 \quad \text{و } n \geq 59,07$$

$$S_n = \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + \dots + \frac{1}{U_n} \quad (5)$$

$$S_n = \frac{3-3^0}{6} + \frac{3-3^{-1}}{6} + \dots + \frac{3-3^{-n}}{6}$$

$$S_n = \frac{3+3+\dots+3-(3^0+3^{-1}+3^{-2}+\dots+3^{-n})}{6}$$

مجموع حدود متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ و حد الأول 1

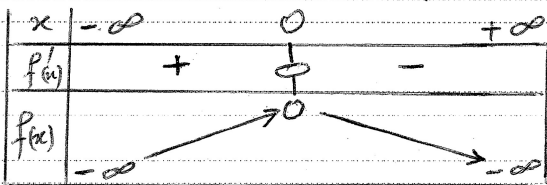
$$S_n = \frac{3(n+1) - \left(\frac{1-3^{-n-1}}{1-\frac{1}{3}} \right)}{6} = \frac{3(n+1) - \frac{3}{2}(1-3^{-n-1})}{6}$$

$$S_n = \frac{2n+1+3^{-n-1}}{4}$$

II

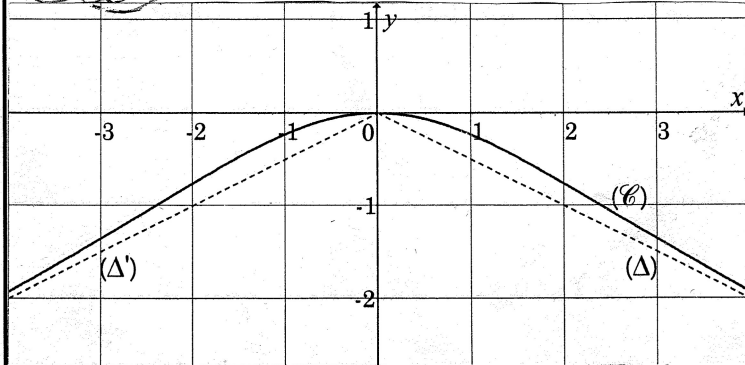
$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1}}{U_{n+1}-2} = \frac{\frac{(\alpha+2)U_n}{U_n+2-\alpha}}{\frac{(\alpha+2)U_n}{U_n+2-\alpha}-2}$$

(ب) $1+g(x) \leq 0$ و f متناقصة تماماً على $[0; +\infty[$ و زوجية فهي متزايدة تماماً على $] -\infty; 0]$.



(P4) f مستمرة و متناقصة على $[2, 3; 2, 4]$ و $f(2,3) = -0,94 > -1$ و $f(2,4) = -1,0004 < -1$ و $f(x) = -1$ حسب مبرهنة القيمة المتوسطة فإن: $f(\alpha) = -1$ حيث $\alpha \in]2,3; 2,4[$ و $f(-x) = f(x)$ و $-2,4 < \beta < -2,3$.

(ب) f زوجية: $f(-x) = f(x)$ و (Δ) : $y = \frac{x}{2}$



(III - 1) $M_0 > 0$, $M_0 = 1$: $n=0$ نغرض أن $M_n > 0$ من أجل كل عدد n كفي و نبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي $M_{n+1} > 0$ مما سبق طما $x > 0$, $(f(x) + \frac{x}{2}) > 0$ و $M_{n+1} = (f(M_n) + \frac{M_n}{2}) > 0$ و $M_n > 0$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

$$M_{n+1} - M_n = f(M_n) - \frac{M_n}{2} = \frac{-M_n e^{M_n}}{e^{M_n} + 1} < 0 \quad (2)$$

و (M_n) متناقصة.

(Mn) متناقصة و محدودة من الأسفل فهي متقاربة.

$$M_{n+1} = f(M_n) + \frac{M_n}{2} = \frac{M_n}{e^{M_n} + 1} \quad (P3)$$

$$e^{M_n} + 1 > 2 \quad , \quad e^{M_n} > 1 \quad , \quad M_n > 0$$

$$\frac{1}{e^{M_n} + 1} < \frac{1}{2} \quad \text{عند ضرب طرفي المتباينة: } (M_n)$$

$$M_{n+1} < \frac{1}{2} M_n \quad \text{و } \frac{M_n}{e^{M_n} + 1} < \frac{M_n}{2}$$

$$k = \frac{1}{2} \quad \text{لذا:}$$

(ب) $M_0 \leq 1$, $M_0 \leq (\frac{1}{2})^0$: $n=0$ نغرض أن $M_n \leq (\frac{1}{2})^n$ من أجل كل n كفي و نبرهن صحتها من أجل $(n+1)$ أي $M_{n+1} \leq (\frac{1}{2})^{n+1}$.

$$\text{لدينا: } M_n \leq (\frac{1}{2})^n \quad , \quad \frac{1}{2} M_n \leq (\frac{1}{2})^{n+1} \quad , \quad M_{n+1} \leq \frac{1}{2} M_n \leq (\frac{1}{2})^{n+1}$$

$$\text{و } M_{n+1} \leq (\frac{1}{2})^{n+1} \quad \text{لذا: } M_n \leq (\frac{1}{2})^n \quad \text{من أجل كل } n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = 0 \quad \text{و } \lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{1}{2})^n = 0 \quad \text{و } 0 < M_n \leq (\frac{1}{2})^n$$

$$V_{n+1} = \frac{(\alpha+2)U_n}{(2-\alpha)U_n - 2\alpha(2-\alpha)} = \frac{\alpha+2}{2-\alpha} \left(\frac{U_n}{U_n - 2\alpha} \right)$$

$$q = \frac{2+\alpha}{2-\alpha} \quad \text{و } V_{n+1} = \left(\frac{2+\alpha}{2-\alpha} \right) V_n$$

$$V_n = V_0 q^n = \left(\frac{2+\alpha}{2-\alpha} \right)^n = \left(\frac{2+\alpha}{2-\alpha} \right)^{n+1}$$

$$2 < 2-\alpha < 4 \quad ; \quad 0 < -\alpha < 2 \quad ; \quad -2 < \alpha < 0 \quad (2)$$

$$\text{و } 0 < 2+\alpha < 2 \quad ; \quad \frac{1}{4} < \frac{1}{2-\alpha} < \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0 \quad \text{متناقصة} \quad (0 < \frac{2+\alpha}{2-\alpha} < 1)$$

$$S_n = \ln(2-\alpha) \left(\frac{2+\alpha}{2-\alpha} \right) + \ln(2-\alpha)^2 \left(\frac{2+\alpha}{2-\alpha} \right)^2 + \dots + \ln(2-\alpha)^n \left(\frac{2+\alpha}{2-\alpha} \right)^n$$

$$S'_n = \ln(2+\alpha) + \ln(2+\alpha)^2 + \dots + \ln(2+\alpha)^n$$

$$S'_n = \ln(2+\alpha) + 2\ln(2+\alpha) + \dots + n\ln(2+\alpha)$$

$$S'_n = (1+2+\dots+n)\ln(2+\alpha) = \frac{n(n+1)}{2} \ln(2+\alpha)$$

تمرين 3:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \quad \text{و } g(0) = -1 \quad (I - 1)$$

$$g'(x) = -(e^x(e^x+2x) + e^x(e^x+2)) \quad (2)$$

$$x \geq 0 \quad \text{و } -2e^x(x+1+e^x) < 0$$

$$g(x) \leq -1 \quad \text{و } g(x) + 1 \leq 0 \quad \text{من أجل كل } x \in [0; +\infty[$$

(II - 1) من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ فإن $-x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = \frac{-x}{2} \left(\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} \right) = \frac{-x}{2} \left(\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} \right) \frac{e^x}{e^x}$$

$$f(-x) = \frac{-x}{2} \left(\frac{e^x-1}{e^x+1} \right) = \frac{x}{2} \left(\frac{1-e^x}{1+e^x} \right) = f(x)$$

و f زوجية. (ع) متناظر بالنسبة لـ $(y'Oy)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} \left[\frac{e^x(\frac{1}{e^x}-1)}{e^x(\frac{1}{e^x}+1)} \right] = -\infty \quad (P2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + \frac{x}{2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} \left(\frac{1-e^x}{1+e^x} + 1 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + \frac{x}{2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} \left(\frac{2}{1+e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{e^x}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + \frac{x}{2}) = 0 \quad \text{و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{2}{x}} = 0$$

$$(ب) \text{ ندرس المتسلسلة: } (f(x) + \frac{x}{2}) = \frac{x}{e^x+1}$$

$$x > 0 \quad (ع) \text{ على } (\Delta) \quad , \quad x < 0 \quad (ع) \text{ أسفل } (\Delta)$$

$$(ع) \text{ يقطع } (\Delta) \text{ عند المبدأ } (0,0)$$

$$(\Delta) \text{ يمثل المستقيم المقارب للمائل } (ع) \text{ بجوار } +\infty$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1-e^x}{1+e^x} \right) + \frac{x}{2} \left(\frac{-e^x(e^x+1) - e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^2} \right) \quad (P3)$$

$$f'(x) = \frac{(1-e^x)(1+e^x) + x(-2e^x)}{2(1+e^x)^2} = \frac{1-e^{2x}-2xe^x}{2(1+e^x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1+g(x)}{2(1+e^x)^2}$$