الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: جوان 2010

الشعبة: تسيير واقتصاد (ن.ج)

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 3 ساعات و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

يمثّل الجدول التالي ضغط الدم y_i بدلالة السن x_i لعينة من الرجال.

السن x_i	35	40	45	50	55	60	65
ضغط الدم y_i	12,2	12,4	12,5	13	13,3	13,6	14

1) مثّل الجدول بسحابة نقط $M_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ في معلم متعامد مبدؤه $O'(30\,;11)$ وبوحدة $1cm$ لكل 5 سنوات على محور الفواصل و $2cm$ لكل وحدة على محور التراتيب.

2) أ) عيّن إحداثيي G النقطة المتوسطة للسحابة.

ب) مثّل النقطة G في المعلم السابق.

3) أوجد معادلة مستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا: $y=ax+b$ ، تعطى a و b مدورة إلى 10^{-2}.

4) أرسم هذا المستقيم في المعلم السابق.

5) رجل عمره 70 سنة وضغط دمه 15,2. هل هذا معقول حسب هذا التعديل ؟ علّل.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\left(\ln(x)\right)^2+2\ln(x)-3$

و $\left(c_f\right)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس. ($\ln$ هو رمز اللوغاريتم النبيري)

1) أ) حل في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة: $f(x)=0$ ثم فسّر النتيجة هندسيا.

ب) حلّل $f(x)$ إلى جداء عاملين.

ج) حل في المجال $]0;+\infty[$ المتراجحة : $2\ln(x)+2\geq 0$

2) أحسب $f'(x)$ واستنتج اتجاه تغير الدالة f.

3) بيّن أن المنحنى $\left(c_f\right)$ يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثييها.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1) n عدد طبيعي، أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = 1 + e + e^2 + \ldots + e^n$

(S_n مجموع حدود متتالية هندسية أساسها e وحدها الأول 1 ؛ و e يرمز إلى اساس اللوغاريتم النبيري).

2) لتكن المتتالية العددية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = 2n + 4 + e^n$

بيّن أن: $w_n = u_n + v_n$

حيث (u_n) متتالية حسابية و (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين الحد الأول وَ الأساس لكل منهما.

3) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

$$4 + 6 + 8 + \ldots + (2n + 4) = (n + 1)(n + 4)$$

4) استنتج المجموع S بدلالة n حيث:

$$S = w_0 + w_1 + \ldots + w_n$$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = \dfrac{x^3 - 5x^2 + 4}{x^2}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ فإن: $f(x) = x - 5 + \dfrac{a}{x^2}$ ، حيث a عدد حقيقي يطلب تعيينه.

2) أحسب: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

3) أ- بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ فإن: $f'(x) = \dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3}$، استنتج اتجاه تغير الدالة f.

ب- شكّل جدول تغيرات الدالة f .

4) أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما مائل، يطلب تعيين معادلتيهما.

5) أوجد معادلة لــ(Δ) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

6) أرسم (Δ) والمنحنى (C_f).

7) أ- عيّن الدالة الأصلية F للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ والتي تحقق: $F(2) = -10$.

ب- أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = 2$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

يُمثّل الجدول التالي تطور إنتاج سنوي بالطن لأحد أنواع الأسماك في إحدى المجمعات المائية لتربية الأسماك:

السنة	2004	2005	2006	2007	2008	2009
ترتيب السنوات x_i	1	2	3	4	5	6
الإنتاج y_i	530	640	770	850	980	1115

1) مثّل سحابة النقط $M_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ المرفقة بالسلسلة الإحصائية في معلم متعامد

(على محور الفواصل $2cm$ يمثل سنة واحدة، على محور التراتيب $1cm$ يمثل 100 طن من السمك).

2) عيّن إحداثيي النقطة المتوسطة G لهذه السحابة.

3) بيّن أنّ معادلة مستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا هي: $y = 115\,x + 411{,}67$.

4) عيّن إنتاج هذا المُجمع المائي في سنة 2015. (تعطى كل النتائج مدورة إلى 10^{-2})

التمرين الثاني: (06 نقاط)

لتكن $\left(u_n\right)$ المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{4}$.

1) احسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3.

2) أ - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n < 2$.

ب - بيّن أن المتتالية $\left(u_n\right)$ متزايدة تماما.

جـ - استنتج أن المتتالية $\left(u_n\right)$ متقاربة.

3) نعتبر المتتالية $\left(v_n\right)$ المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n - 2$.

أ - بيّن أنّ $\left(v_n\right)$ متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

ب - اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 2 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

جـ - ما هي نهاية المتتالية $\left(u_n\right)$ ؟

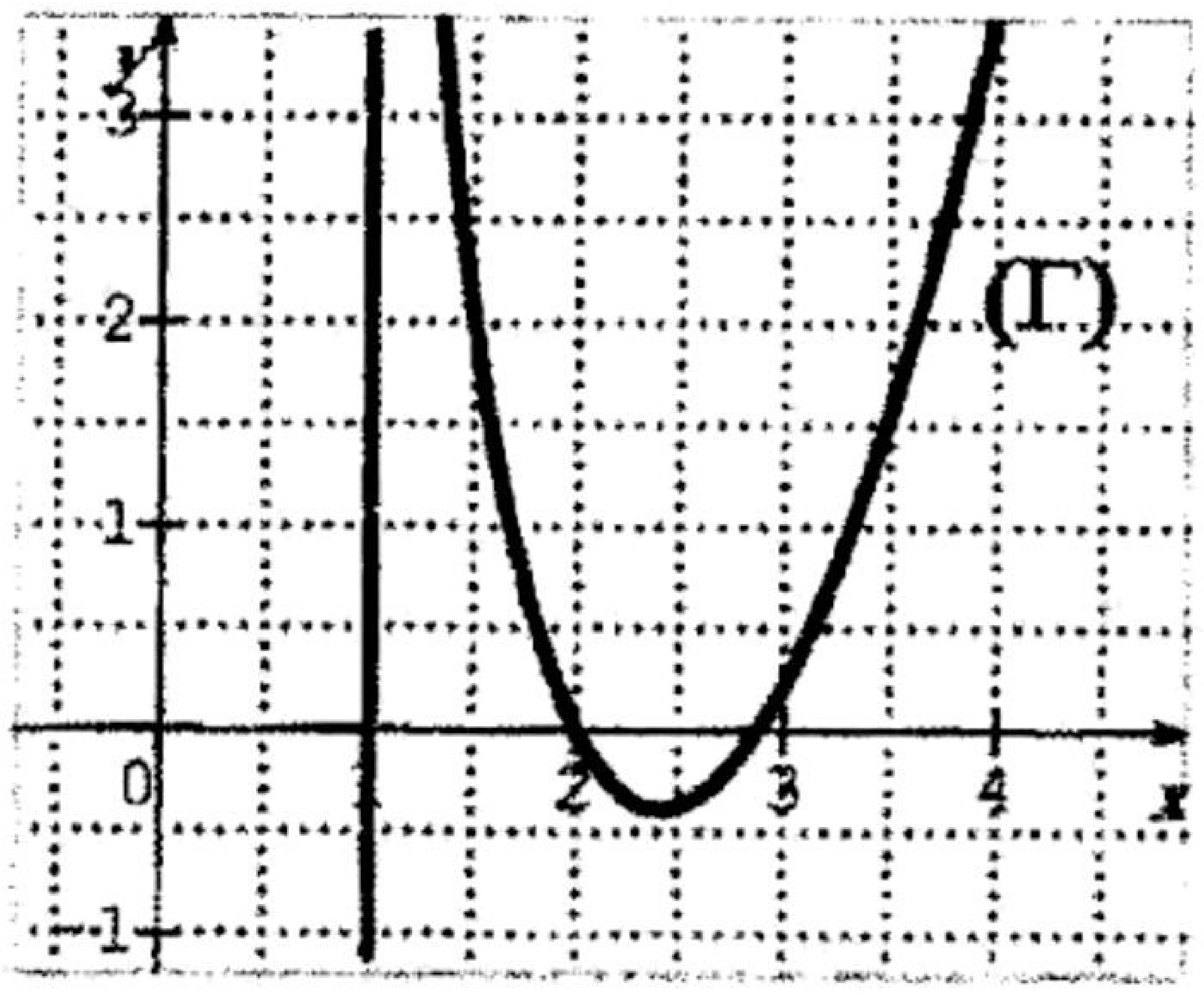
4) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ واستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n

فإن: $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = 3\left(\dfrac{3}{4}\right)^n + 2n - 2$

التمرين الثالث: (09 نقاط)

I) لتكن g الدالة العددية المعرّفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^2-2x-4\ln(x-1)$

($\ln$ هو رمز اللوغاريتم النبيري). (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس كما هو في الشكل التالي:



1) بقراءة بيانية ، عيّن عدد حلول المعادلة $g(x)=0$.

2) احسب $g(2)$.

3) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا α حيث : $2{,}87<\alpha<2{,}88$.

4) استنتج حسب قيم x ، إشارة $g(x)$ في المجال $]1;+\infty[$.

II) لتكن f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=x-3+4\frac{\ln(x-1)}{x-1}+\frac{5}{x-1}.$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ - أوجد نهاية الدالة f عند $+\infty$. (لاحظ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$)

ب - احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)$ ثم فسّر النتيجة هندسيا.

جـ - بيّن أنّ المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x-3$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

د - أوجد فاصلة نقطة تقاطع (Δ) مع (C_f).

هـ - ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

2) أ - بيّن أنّه من أجل كل عدد x من المجال $]1;+\infty[$ لدينا:

$f'(x)=\frac{g(x)}{(x-1)^2}$ ، (f' هي الدالة المشتقة للدالة f).

ب - استنتج اتجاه تغيّر الدالة f وشكّل جدول تغيّراتها.

3) ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) . (نأخذ $f(\alpha)=3{,}9$)

4) أ - عين مشتقة الدالة: $x\mapsto[\ln(x-1)]^2$ ، ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$.

ب - احسب: $\int_2^5 f(x)\,dx$ ، فسّر النتيجة هندسيا.

<table>
<tr><th>محاور الموضوع</th><th>عناصر الاجابة
الموضوع الأول</th><th>العلامة مجزأة</th><th>العلامة المجموع</th></tr>
<tr><td></td><td>التمرين الأول: (05 نقاط)
1) تمثيل سحابة النقط ....
2) أ) $G(50;13)$ ب) تمثيل G ....
3) تعيين المعادلة: $y = ax + b$
$$a = \frac{\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} x_i y_i - \bar{x}\,\bar{y}}{\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} x_i^2 - \bar{x}^2} = 0,06$$ ....
$\bar{y} = a\bar{x} + b$ نجد : $b = 10$ إذن: $y = 0.06x + 10$ ....
(بالآلة الحاسبة العلمية نجد: $y = 0.06x + 9.93$)
4) رسم المستقيم ....
5) $x = 70$ نجد $y = 14.2$ ، غير معقول حسب هذا التعديل ....</td><td>7x0.25
0.25+1

1

0.5

0.25
0.25</td><td>05</td></tr>
</table>

سلم خاص بالمكفوفين:

1) $G(50;13)$	1,5
2) المعادلة	1,5
3) غير معقول	01
4) $x = 30$	01

<table>
<tr><td></td><td>التمرين الثاني: (04 نقاط)
1) أ) $f(x) = 0$ تكافئ $\begin{cases} \ln(x) = z & \dots (1) \\ z^2 + 2z - 3 = 0 & \dots (2) \end{cases}$
حلول (2) هما 1 ، 3-
لما $z = 1$ نجد $x = e$ ، لما $z = -3$ نجد $x = e^{-3}$ ....
إذن $f(x) = 0$ تكافئ ($x = e$ أو $x = e^{-3}$)
هندسيا: (C_f) يقطع (xx') في نقطتين فاصلتيهما e ، e^{-3} ....
ب) $f(x) = (\ln x - 1)(\ln x + 3)$ ....
جـ) $2\ln x + 2 \geq 0$ تكافئ $x \geq \frac{1}{e}$ ....
2) $f'(x) = \frac{2\ln x + 2}{x}$ إشارته: 0 ‖ $-$ $1/e$ (0) $+$ $+\infty$
f متزايدة تماما على $\left[\frac{1}{e}; +\infty\right[$ ومتناقصة تماما على $\left]0; \frac{1}{e}\right]$ ....
3) $f''(x) = \frac{-2\ln x}{x^2}$ إشارته: 0 ‖ $+$ 1 (0) $-$ $+\infty$
$\omega(1; -3)$ نقطة انعطاف</td><td>

1

0.25
0.25
0.5
0.5
0.5
0.5
0.5</td><td>04</td></tr>
</table>

محاور الموضوع	عناصر الإجابة **تابع الموضوع الأول**	العلامة: مجزأة	العلامة: المجموع
	التمرين الثالث: (04 نقاط)		04
	1) $S_n = \dfrac{e^{n+1}-1}{e-1}$	1	
	2) $u_n = 2n+4$ ؛ $u_0 = 4$ ، $r = 2$	0.75	
	$v_n = e^n$ ؛ $v_0 = 1$ ، $q = e$	0.75	
	3) $4+6+8+\ldots+(2n+4) = u_0+u_1+\ldots+u_n$ $= (n+1)(n+4)$ .... أو استعمال الاستدلال بالتراجع.	1	
	4) $S = (u_0+u_1+\ldots+u_n)+(v_0+v_1+\ldots+v_n)$ $= (n+1)(n+4)+\dfrac{e^{n+1}-1}{e-1}$	0.5	
	التمرين الرابع: (07 نقاط)		07
	1) $a = 4$ و $f(x) = x-5+\dfrac{4}{x^2}$	0.5	
	2) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ ...	3x0.25	
	3) أ) $f'(x) = \dfrac{x^3-8}{x^3} = \dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3}$	1	
	إشارة $f'(x)$: $-\infty$ + 0 - 2 + $+\infty$	0.5	
	f متزايدة تماما على كل من $]-\infty\,;0[$ و $[2\,;+\infty[$ f متناقصة تماما على $]0\,;2]$	0.25	
	ب) جدول التغيرات: $\begin{array}{c\|ccc\|\|ccccc} x & -\infty & & 0 & & & 2 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & & & - & 0 & + & \\ \hline f(x) & -\infty & \nearrow & +\infty & +\infty & \searrow & -2 & \nearrow & +\infty \end{array}$	0.5	
	سلم خاص بالمكفوفين: 3) أ) حساب $f'(x)$ .... 1 ب) إشارة $f'(x)$ + اتجاه التغير 1		
	4) $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} [f(x)-(x-5)] = 0$ ، $(D): y = x-5$	0,25+0,5	
	$x = 0$ معادلة مستقيم مقارب	0,25	
	5) معادلة المماس (Δ): $y = -7x+7$	0.5	
	6) رسم (Δ) و (C_f)	05+0.25	
	سلم خاص بالمكفوفين: $f(x)-y = \dfrac{4}{x^2} > 0$ ، (C_f) فوق (D) المقارب المائل 1		

163

العلامة: المجموع	العلامة: مجزأة	عناصر الإجابة	محاور الموضوع
		تابع الموضوع الأول	
	0.5	7) أ- تعيين الدالة الأصلية : $F(x)=\frac{1}{2}x^2-5x-\frac{4}{x}$ ………………	
	0.75	ب- حساب المساحة: $A=\int_1^2 -f(x)dx=-\left[\frac{1}{2}x^2-5x-\frac{4}{x}\right]_1^2=\frac{3}{2}\,ua$ ،	
		الموضوع الثاني	
		التمرين الأول: (06 نقاط)	
	6×0.25	1) تمثيل سحابة النقط ………………………………………	
	1	2) $G(3,5;\ 814,17)$ ………………………………………	
	0.5+1	3) إثبات: $y=115\,x+411,67$ ………………………………	
05	1	4) في سنة 2015 لدينا: $x=12$ ومنه $y=1791,67$	
		سلم خاص بالمكفوفين: 1) G ……………………… 1.5 2) المعادلة ……………………… 1.5 3) $y=1791,67$ ………… 1 4) $x=0$ ، $y=411,67$ …. 1	
		التمرين الثاني: (06 نقاط)	
	3×0.25	1) $u_1=\frac{5}{4}$ ، $u_2=\frac{23}{16}$ ، $u_3=\frac{101}{64}$ ………………………	
	1	2) أ) البرهان بالتراجع ………………………………	
	0.75	ب) $u_{n+1}-u_n=\frac{2-u_n}{4}>0$ ، (u_n) متزايدة تماما …………	
	0.25	جـ) (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة …………	
	0.25+0.5	3) أ) $v_{n+1}=\frac{3}{4}v_n$ ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ ………	
06	0.25	وحدها الأول $v_0=-1$ ………………………………	
	0.25+0.5	ب) $v_n=-\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ، $u_n=2-\left(\frac{3}{4}\right)^n$ …………………	
	0.5	جـ) $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=2$ ………………………………	
	0.5	4) $S_n=4\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right)$ ………………………	
	0.5	$u_0+u_1+\ldots+u_n=3\left(\frac{3}{4}\right)^n+2n-2$ ………………………	

			التمرين الثالث: (09 نقاط)	
		0.25	I) 1) عدد حلول المعادلة $g(x)=0$ هو 2	
		0.25	2) $g(2)=0$	
		1	3) $g(\alpha)=0$ ، $2,87<\alpha<2,88$	
		0.5	4) إشارة $g(x)$: ..... x: 1 ‖ + 2 (0) - α (0) +	
			سلم خاص بالمكفوفين: 1) $g(2)=0$ .... 0.75 2) $g(\alpha)=0$ ، $2,87<\alpha<2,88$ ...... 1 3) إشارة $g(x)$. 0.5	
		0.5	II) 1) أ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$	
		2×0.25	ب) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)=-\infty$ ، $x=1$ معادلة مستقيم مقارب	
		0.5	جـ) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-3)]=0$ ، (Δ) مستقيم مقارب مائل	
		0.5	د) فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع (Δ) هي: $x=1+e^{-\frac{5}{4}}$	
		0.5	هـ) وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)	
	09	0.75	2) أ) $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x-1)^2}$	
		0.25	ب) f متزايدة تماما على كل من $]1\ ;\ 2]$ وَ $[\alpha\ ;+\infty[$	
		0.25	f متناقصة تماما على $[2\ ;\ \alpha]$	
		0.5	جدول التغيرات	
			سلم خاص بالمكفوفين: 2) أ) $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x-1)^2}$ .... 1 ب) اتجاه تغير f 1	
		1	3) رسم المنحني (C_f) و المستقيم (Δ):	
			سلم خاص بالمكفوفين: 3) القيمة الحدية العظمى $f(2)=4$ 0.5	
		0.5	4) أ) الدالة المشتقة: $x\mapsto 2\dfrac{\ln(x-1)}{x-1}$	
		0.5	$x\mapsto \frac{1}{2}x^2-3x+2[\ln(x-1)]^2+5\ln(x-1)$ دالة أصلية لـ f	
		0.5	ب) $\int_2^5 f(x)dx=8\ln^2 2+10\ln 2+\dfrac{3}{2}$	
		0.25	هندسيا: التكامل هو مساحة الحيز تحت المنحنى والمحدد بالمستقيمين ذوي المعادلتين: $x=2$ و $x=5$	