

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

لتكن  $(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة بـ:  $u_0 = 1$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{9}$ .

(1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $u_n > \frac{2}{3}$ .

ب- بين أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة.

(2) نعتبر المتتالية  $(v_n)$  المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بـ:  $v_n = u_n - \frac{2}{3}$ .

أ- بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية، يطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

ب- اكتب عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$ ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $u_n = \frac{1}{3} \left[ \left( \frac{1}{3} \right)^n + 2 \right]$ .

ج- ما هي نهاية المتتالية  $(u_n)$ ؟

(3) احسب، بدلالة  $n$ ، المجموع  $S_n$  حيث:  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ .

التمرين الثاني: (05 نقاط)

يعطي الجدول أدناه، كميات الحليب، مقدرة بالهكتولتر  $hL$ ، التي تمّ تجميعها في إحدى ولايات الوطن من سنة 2006 إلى سنة 2011:

السنة	2006	2007	2008	2009	2010	2011
رتبة السنة $x_i$	1	2	3	4	5	6
كمية الحليب المجمعة $y_i$ (بالهكتولتر $hL$ )	25000	26000	28500	29000	31000	33498

(1) مثل سحابة النقط  $M(x_i; y_i)$  في معلم متعامد مبدؤه  $O'(0; 20000)$  و بوحدة  $1 cm$  لكل سنة على

محور الفواصل و  $1 cm$  لكل  $2000 hL$  على محور الترتيب.

(2) أ- عيّن إحداثيتي النقطة المتوسطة  $G$  لهذه السحابة.

ب- عيّن معادلة مستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا. ( تعطي نتائج كل حساب مدوّرة إلى  $10^{-2}$  )

(3) قدّر كمية الحليب التي يمكن تجميعها في سنة 2015 باستعمال التعديل الخطي السابق.

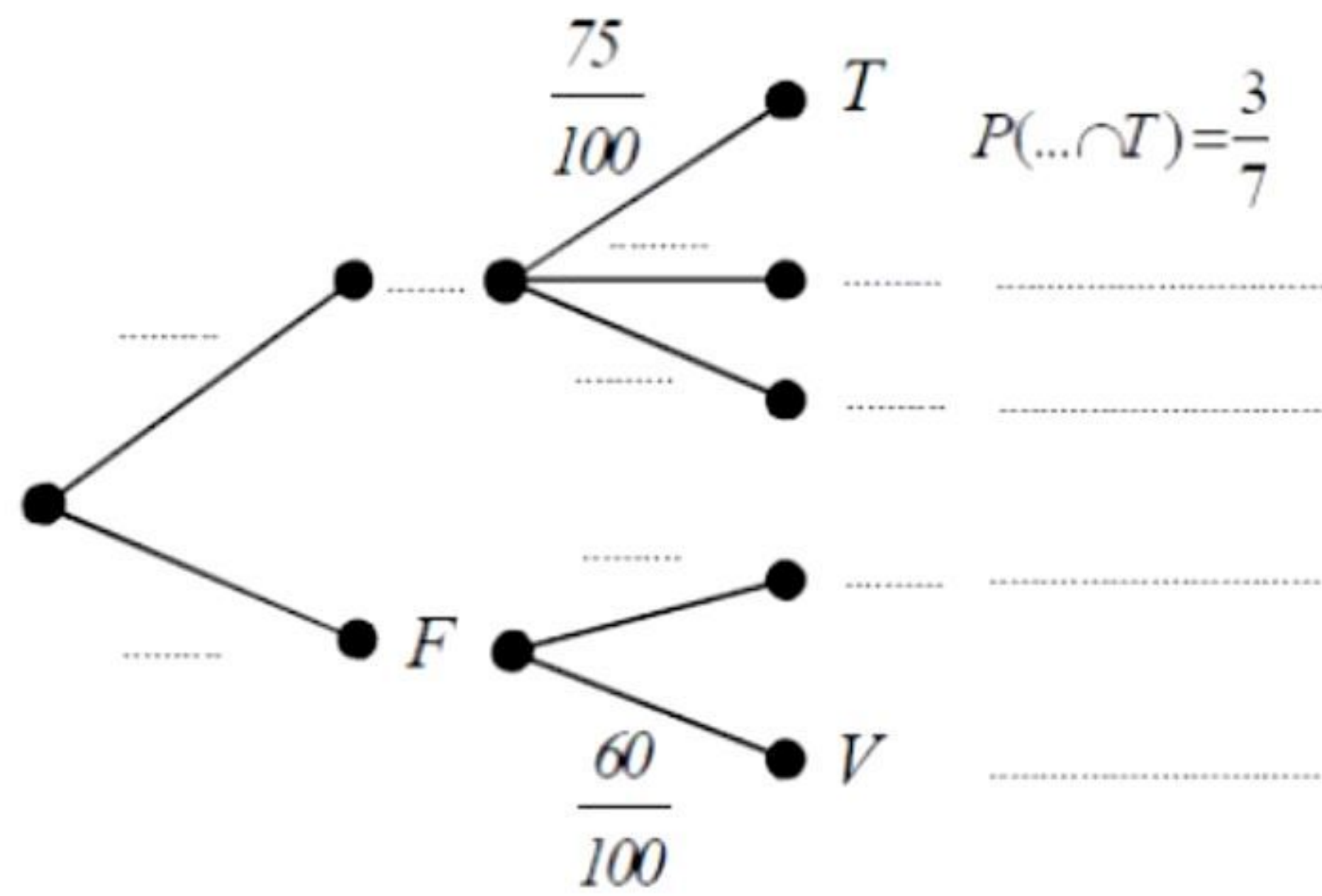
(4) إذا اعتبرنا أن كمية الحليب المجمعة في السنوات الموالية لسنة 2011 تتمّ بنفس الوتيرة التي تمت بها من

سنة 2006 إلى سنة 2011، فابتداءً من أية سنة ستتعدى الكمية المجمعة  $50000 hL$ ؟

**التمرين الثالث: ( 04 نقاط )**

(تعطى النتائج على شكل كسور غير قابلة للاختزال).

عدد تلاميذ قسم دراسي هو 35 تلميذا من بينهم 15 بنتا. يختار كل تلميذ من القسم رياضة واحدة وواحدة فقط يمارسها في إطار نشاطات النادي الرياضي للمؤسسة. 75% من الأولاد اختاروا ممارسة كرة القدم و 15% اختاروا ممارسة كرة اليد بينما اختار 10% ممارسة الكرة الطائرة. 60% من البنات اخترن ممارسة الكرة الطائرة والبقية اخترن ممارسة كرة اليد. لتمثيل هذا القسم في منافسة رياضية، يتم اختيار تلميذ واحد منه بطريقة عشوائية. يرمز  $G$  إلى الحادثة " التلميذ المختار ولد " ويرمز  $F$  إلى الحادثة " التلميذ المختار بنت " .



يرمز  $T$  إلى الحادثة " التلميذ المختار يمارس كرة القدم " .

يرمز  $M$  إلى الحادثة " التلميذ المختار يمارس كرة اليد " .

يرمز  $V$  إلى الحادثة " التلميذ المختار يمارس الكرة الطائرة " .

(1) انقل الشجرة المقابلة على ورقة الإجابة، ثم أكملها.

(2) أحسب  $P(V)$  احتمال أن تتحقق الحادثة  $V$  .

(3) أحسب الاحتمال الشرطي  $P_V(G)$  .

(4) أحسب احتمال أن يكون التلميذ المختار لا يمارس كرة القدم.

**التمرين الرابع: (06 نقاط)**

التمثيل البياني  $(C_f)$  المقابل هو للدالة  $f$  المعرفة على المجال  $[1; +\infty[$  بالعلاقة :  $f(x) = ax + b + cx \ln x$  حيث  $a, b, c$  أعداد حقيقية.

(1) خمن بقراءة بيانية اتجاه تغير  $f$  ونهاية  $f$  عند  $+\infty$  .

(2) أ- أحسب بدلالة  $a$  و  $c$  عبارة  $f'(x)$  حيث  $f'$  هي الدالة

المشتقة للدالة  $f$  على  $[1; +\infty[$  .

ب- باستعمال معطيات في الشكل، وعلما أن  $f(5) = 16 - 10 \ln 5$  .

- بيّن أن:  $f(x) = 3x + 1 - 2x \ln x$  .

ج- تحقق من صحة تخمينك في السؤال 1، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة  $f$  .

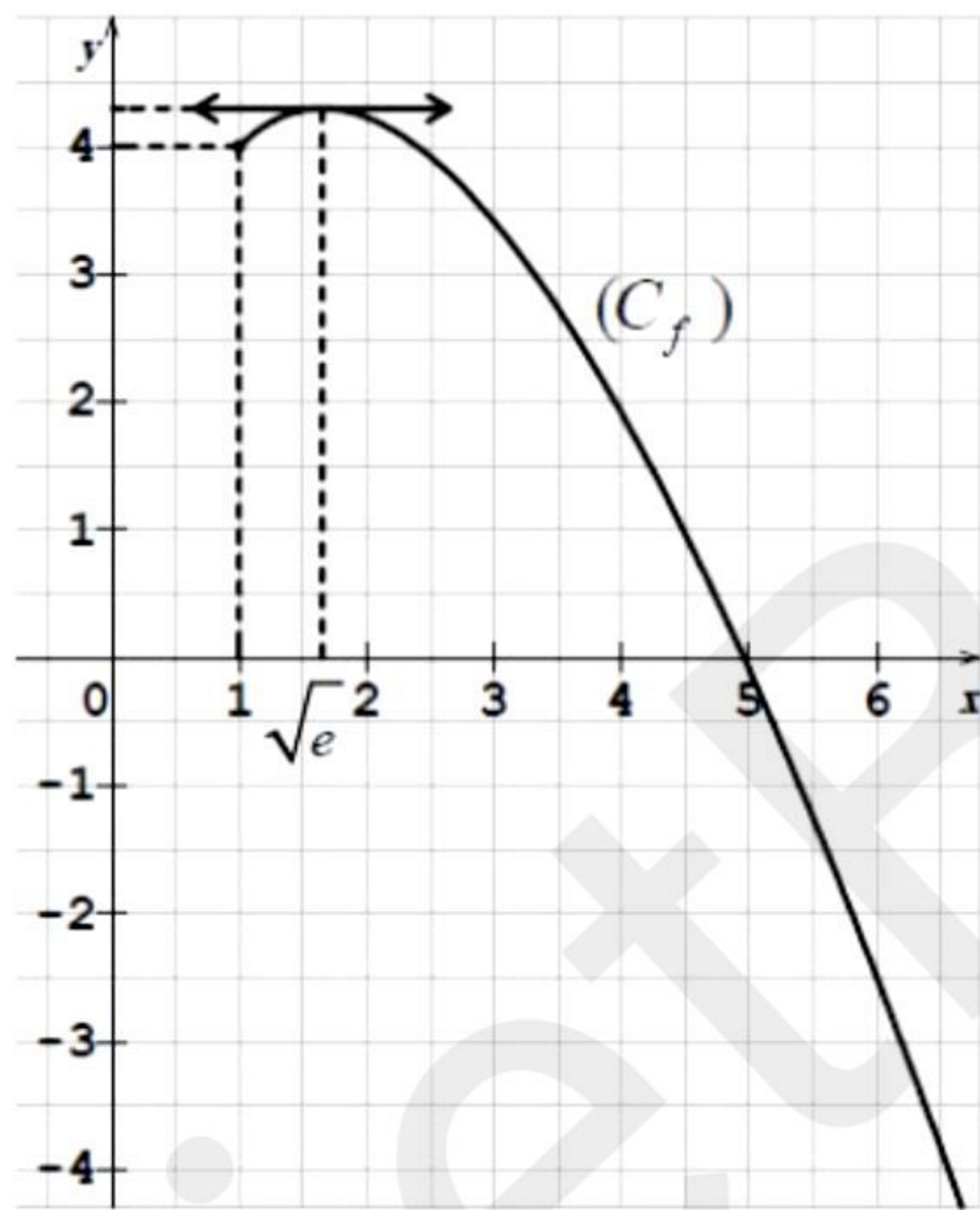
(3) بيّن أن المعادلة:  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  على  $[1; +\infty[$ ، ثم تحقق أن  $4,95 < \alpha < 4,96$  .

(4) نعرف العدد الحقيقي  $S$  كما يلي:  $S = \int_1^{\alpha} f(x) dx$  (حيث  $\alpha$  هو حل المعادلة  $f(x) = 0$ ) .

أ- بيّن أن الدالة:  $g : x \mapsto 2x^2 + x - x^2 \ln x$  دالة أصلية للدالة  $f$  على  $[1; +\infty[$  .

ب- أعط تفسيرا هندسيا للعدد  $S$ ، ثم احسبه بدلالة  $\alpha$  .

ج- بيّن أن:  $S = \frac{1}{2} \alpha(\alpha + 1) - 3$ ، ثم استنتج حصرا للعدد  $S$  .



## الموضوع الثاني

### التمرين الأول: (05 نقاط)

في بداية جانفي 2008 وضع شخص مبلغا من المال قدره 50000 DA في صندوق التوفير والاحتياط. يقدم الصندوق فائدة قدرها 5% سنويا .

يسحب هذا الشخص نهاية كل سنة مبلغا قدره 5000 DA (بعد حساب الفوائد).

يرمز  $u_n$  إلى المبلغ الذي يملكه هذا الشخص في حسابه بداية جانفي من السنة  $2008+n$  .

(1) أ- أحسب كلا من  $u_0$ ،  $u_1$  و  $u_2$  .

ب- هل المتتالية  $(u_n)$  هندسية؟ هل هي حسابية؟ برّر إجابتك.

ج- بيّن لماذا من أجل كل عدد طبيعي  $n$  لدينا،  $u_{n+1} = 1,05u_n - 5000$  .

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $v_n = u_n - 100000$  .

أ- بيّن أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية، حدّد أساسها وحدّها الأوّل.

ب- أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$ ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $u_n = -50000 \times (1,05)^n + 100000$  .

(3) أ- ما هو المبلغ الذي يكون في حساب هذا الشخص نهاية عام 2015؟

ب- ابتداء من أية سنة لا تسمح إدارة الصندوق لهذا الشخص بسحب المبلغ المعتاد على سحبه في نهاية كل سنة؟

### التمرين الثاني: (06 نقاط)

$x$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

جدول التغيرات المقابل هو للدالة  $f$  المعرفة على المجال

$$f(x) = (x+1)e^{1-x} \quad \text{بالعبارة: } [-1; +\infty[$$

ليكن  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب

إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .

(1) بيّن أن معادلة  $(\Delta)$  المماس للمنحنى  $(C_f)$  في النقطة ذات الفاصلة 1 هي:  $y = -x + 3$  .

(2)  $g$  هي الدالة المعرفة على المجال  $[-1; +\infty[$  بالعبارة:  $g(x) = -x e^{1-x} + 1$  .

أ- أدرس اتجاه تغيّر الدالة  $g$  .

ب- أحسب  $g(1)$ ، ثم استنتج إشارة  $g(x)$  على المجال  $[-1; +\infty[$  .

(3)  $h$  هي الدالة المعرفة على المجال  $[-1; +\infty[$  بالعبارة:  $h(x) = (x+1)e^{1-x} + x - 3$  .

أ- لاحظ أنه من أجل كل  $x$  من المجال  $[-1; +\infty[$ ،  $h(x) = f(x) + x - 3$ ، ثم استنتج أن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$  .

ب- بيّن أنه من أجل كل  $x$  من المجال  $[-1; +\infty[$ ،  $h'(x) = g(x)$ ، ثم استنتج جدول تغيرات الدالة  $h$  .

ج- تحقق أن المعادلة:  $h(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا في المجال  $[-1; +\infty[$  يطلب تعيينه.

د- حدّد إشارة  $h(x)$ ، ثم استنتج وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى المستقيم  $(\Delta)$  .

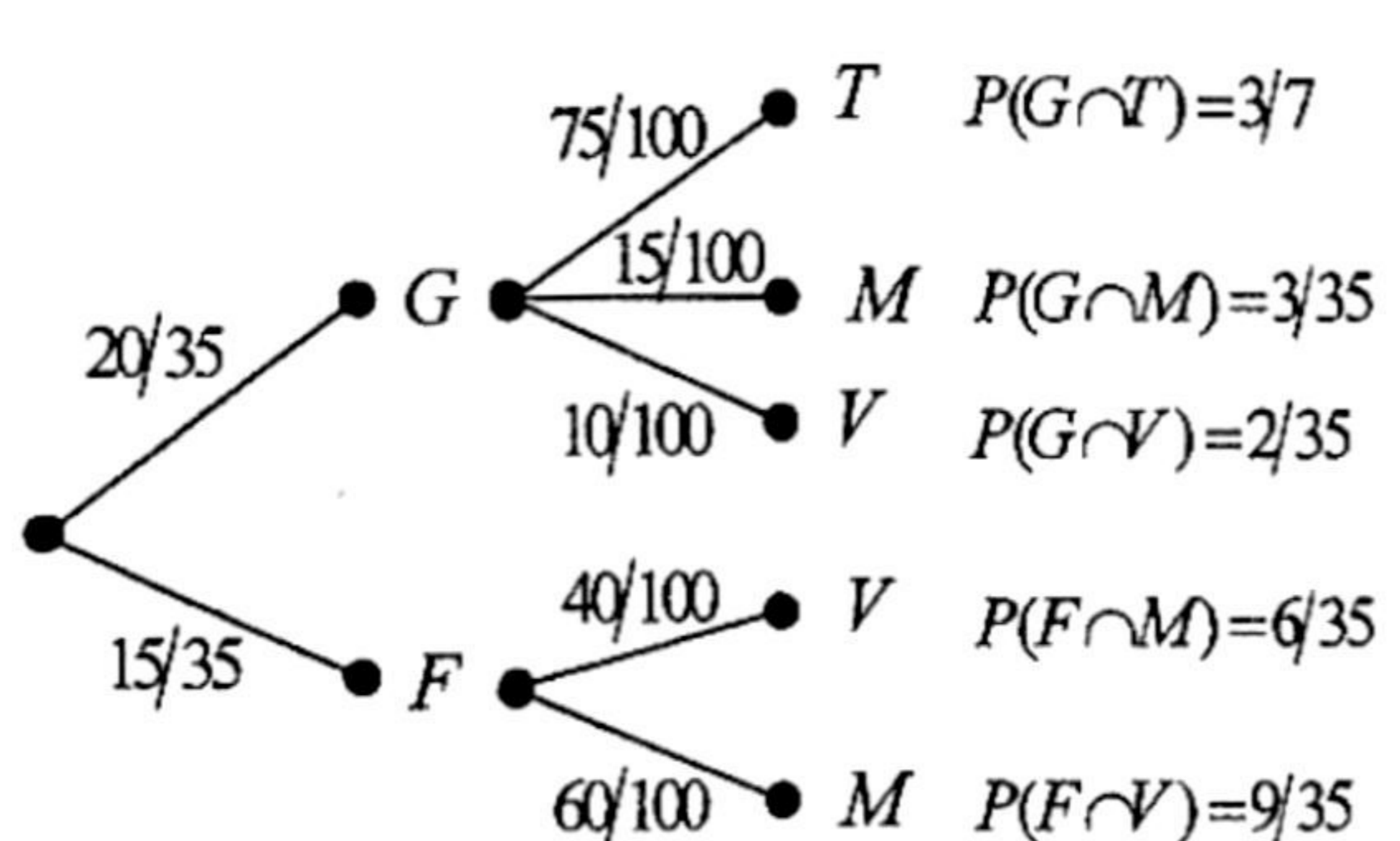
هـ- أنشئ كلا من المماس  $(\Delta)$  والمنحنى  $(C_f)$  .

**التمرين الثالث: (04 نقاط)**

- بيّنت دراسة إحصائية لتلاميذ السنة الثالثة ثانوي بإحدى الثانويات أن 30% من التلاميذ قدموا من الإكمالية A و 45% من الإكمالية B والبقية من الإكمالية C .
- بعد اجتياز التلاميذ لامتحان البكالوريا تبين ما يلي : نجح في الامتحان 25% من التلاميذ القادمين من الإكمالية A و 18% من الذين قدموا من الإكمالية B و 84% من الذين قدموا من الإكمالية C .
- نختار تلميذا من تلاميذ السنة الثالثة ثانوي بطريقة عشوائية بعد اجتياز امتحان البكالوريا.
- يرمز R إلى الحادثة "التلميذ المختار نجح في الامتحان"
- يرمز A إلى الحادثة "التلميذ المختار قادم من الإكمالية A"
- يرمز B إلى الحادثة "التلميذ المختار قادم من الإكمالية B"
- يرمز C إلى الحادثة "التلميذ المختار قادم من الإكمالية C"
- (1) أنجز شجرة الاحتمالات التي تُتمذج هذه الوضعية .
  - (2) أثبت أن  $P(C \cap R) = 0,21$  .
  - (3) احسب  $P(R)$  احتمال الحادثة R .
  - (4) احسب الاحتمال الشرطي  $P_R(B)$  .

**التمرين الرابع: (05 نقاط)**

- f هي الدالة المعرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  : بالعلاقة :  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 100 + \frac{57600}{x+1}$  .
- (1) أحسب نهايتي f عند -1 بقيم أكبر وعند  $+\infty$  .
  - (2) أ- بيّن أنه من أجل كل x من المجال  $]-1; +\infty[$  ،  $f'(x) = \frac{(x^2+x-240)(x^2+x+240)}{(x+1)^2}$  .  
ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال  $]-1; +\infty[$  ، ثم شكّل جدول تغيراتها.  
ج- جد الدالة الأصلية H للدالة  $h: x \mapsto \frac{1}{x+1}$  على المجال  $]-1; +\infty[$  والتي تنعدم من أجل  $x = 0$  .
  - (3) تنتج إحدى شركات تركيب آلات الغسيل خلال أسبوع 5 آلات على الأقل و 200 آلة على الأكثر .  
تتمذج الكلفة الهامشية  $C_m$  لإنتاج x آلة إضافية للشركة على المجال  $[5; 200]$  بالدالة f أي أن :  
من أجل كل x من المجال  $[5; 200]$  ،  $C_m(x) = f(x)$  .  
أ- ما هو عدد الآلات التي يجب أن تنتجها الشركة خلال أسبوع لكي تكون الكلفة الهامشية أقل ما يمكن؟  
ب- نرمز بالرمز  $C(x)$  للكلفة الإجمالية لإنتاج x آلة. ونذكر أن  $C'(x) = C_m(x)$  .  
جد عبارة الكلفة الإجمالية  $C(x)$ ، علما أن الكلفة الإجمالية لإنتاج 5 آلات الأولى هي 40000 DA ، ثم استنتج قيمة الكلفة الإجمالية لإنتاج 15 آلة الأولى.

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الأول)
مجموع	مجزأة	
		<b>التمرين الأول</b>
	01	(1) أ- إثبات أن $u_n > \frac{2}{3}$
	01	ب- اثبات أن $(u_n)$ متناقصة
05	0,75	(2) أ- $(u_n)$ متتالية هندسية. $q = \frac{1}{3}$ ، $v_0 = \frac{1}{3}$
	0,5+0,25	ب- $u_n = \frac{1}{3} \left[ \left( \frac{1}{3} \right)^n + 2 \right]$ ، $v_n = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3} \right)^n$
	0,5	ج- $\lim u_n = \frac{2}{3}$
	0,25	(3) $v_0 + v_1 + \dots + v_n = \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{1}{3} \right)^{n+1} \right]$
	0,75	$S_n = \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{1}{3} \right)^{n+1} \right] + \frac{2}{3}(n+1)$
		<b>التمرين الثاني</b>
	01	(1) تمثيل سحابة النقاط
05	0,5	(2) أ- $G(3,5 ; 28833)$
	0,5+1	ب- $b=23034$ ، $a=1656,86$
	0,5	(3) - رتبة السنة 2015 هي 10
	0,5	- الكمية المقدرة هي حوالي : 39602,6 hL
	0,75	(4) $y > 5000$ و منه $x > 16,27$ أي $x=17$
	0,25	السنة التي رتبته 17 هي 2022
		<b>التمرين الثالث</b>
04	5x0,5	(1) 

	0,5	$P(V)=11/35$	(2)									
	0,5	$P_V(G)=2/11$	(3)									
	0,5	$P(\bar{T})=1-P(T)=4/7$	(4)									
	$2 \times 0,25$ 0,25	التمرين الرابع (1) $f$ متزايدة تماما على $[1; \sqrt{e}]$ و متناقصة تماما على $[\sqrt{e}; +\infty]$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$										
	0,25 $2 \times 0,25$ 0,5	(2) أ- $f'(x) = a + c(\ln x + 1)$ ب- $f(1) = 4$ و $f'(\sqrt{e}) = 0$ $\begin{cases} a + \frac{3}{2}c = 0 \\ a + b = 4 \\ 5a + b + 5c \ln c = 16 - 10 \ln 5 \end{cases}$										
	$4 \times 0,25$ 0,25 0,25	ج- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ 3 + \frac{1}{x} - \ln x \right] = -\infty$ $f'(x) = 1 - 2 \ln x$										
06	0,25	جدول تغيرات الدالة $f$ .										
	0,25	<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>1</th> <th><math>\sqrt{e}</math></th> <th><math>+\infty</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>f'(x)</math></td> <td></td> <td>+</td> <td>0</td> <td>-</td> </tr> </tbody> </table>	x	1	$\sqrt{e}$	$+\infty$	$f'(x)$		+	0	-	
x	1	$\sqrt{e}$	$+\infty$									
$f'(x)$		+	0	-								
	0,25	(3) - المعادلة $f(x) = 0$ لا تقبل حولا على $[1; \sqrt{e}[$ - المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا على $]\sqrt{e}; +\infty[$ - $f(4,95) \times f(4,96) < 0$										
	0,25	(4) أ- $g'(x) = f(x)$ ب- $S$ هي مساحة الحيز المستوي المحدد بـ $(C_f)$ والمستقيمت التي معادلاتها $x = \alpha$ و $x = 1, y = 0$ $S = 2\alpha^2 + \alpha - 3 - \alpha^2 \ln \alpha$ ج- إثبات أن $S = \frac{1}{2}\alpha(\alpha+1) - 3$										
	0,25	$11,72 < S < 11,78$										

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)												
مجموع	مجزأة													
05	0,75	<p>التمرين الأول</p> <p>(1) أ- حساب <math>u_2, u_1, u_0</math></p> <p>ب- <math>(u_n)</math> ليست هندسية لأن <math>u_1^2 \neq u_0 \times u_2</math></p> <p><math>(u_n)</math> ليست حسابية لأن <math>u_0 + u_2 \neq 2u_1</math></p> <p>ج- <math>u_{n+1} = u_n + u_n \times \frac{5}{100} - 5000</math></p>												
	0,25													
	0,25													
	0,5													
	2x0,25 +0,5 2x0,5	<p>(2) أ- <math>q = 1,05 ; v_0 = -5 \times 10^4 ; v_{n+1} = 1,05 v_n</math></p> <p>ب- <math>u_n = -5 \times 10^4 (1,05)^n + 10^5 ; v_n = -5 \cdot 10^4 \times (1,05)^n</math></p>												
	0,5 0,25 0,25 0,25	<p>(3) أ- المبلغ في نهاية 2015 هو <math>u_8 = 26127,23 DA</math></p> <p>ب- <math>u_n &lt; 5000</math></p> <p><math>n &gt; \frac{\ln(1,9)}{\ln(1,05)}</math> ، <math>n &gt; 13,16</math> أي <math>n = 14</math></p> <p>ابتداء من سنة 2022 لا يسمح لهذا الشخص بسحب المبلغ المعتاد</p>												
06	3x0,25	<p>التمرين الثاني</p> <p>(1) <math>f(1) = 2</math> ، <math>f'(1) = -1</math> ، <math>f'(x) = -xe^{1-x}</math></p> <p>(D) : <math>y = -x + 3</math></p> <p>(2) أ- <math>g'(x) = (x-1)e^{1-x}</math></p> <table border="1" style="margin: 10px auto;"> <tr> <td>x</td> <td>-1</td> <td>1</td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td><math>g'(x)</math></td> <td>-</td> <td>0</td> <td>+</td> </tr> <tr> <td><math>g(x)</math></td> <td colspan="3" style="text-align: center;"> </td> </tr> </table> <p>ب- <math>g(1) = 0</math> ، من أجل كل x من <math>[-1; +\infty[</math> ، <math>g(x) \geq 0</math></p>	x	-1	1	$+\infty$	$g'(x)$	-	0	+	$g(x)$			
	x		-1	1	$+\infty$									
	$g'(x)$		-	0	+									
	$g(x)$													
0,25														
0,25														
0,25														

0,25	أ- لدينا $h(x) = f(x) + x - 3$								
0,25	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$								
0,25	ب- $h'(x) = g(x)$								
0,5	<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>-1</td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td>h(x)</td> <td>-4</td> <td><math>-\infty</math></td> </tr> </table>	x	-1	$+\infty$	h(x)	-4	$-\infty$		
x	-1	$+\infty$							
h(x)	-4	$-\infty$							
2x0,25	ج- تطبيق مبرهنة القيم المتوسطة + الرتبة.								
2x0,25	$h(x) = 0$ يعني $x = 1$ و $(\Delta)$ مماس لـ $(C_f)$ في النقطة ذات الفاصلة 1 $[h(x) = f(x) - (-x + 3)]$								
0,5	د- بما أن $h(1) = 0$ فإن								
0,25	<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>-1</td> <td>1</td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td>h(x)</td> <td>-</td> <td>0</td> <td>+</td> </tr> </table>	x	-1	1	$+\infty$	h(x)	-	0	+
x	-1	1	$+\infty$						
h(x)	-	0	+						
1	يقع $(C_f)$ أعلى $(\Delta)$ في $[1; +\infty[$ و يقع أسفله في المجال $[-1, 1]$ . هـ- رسم $(C_f)$ و $(\Delta)$								
04	<p>التمرين الثالث</p> <p>(1) شجرة الاحتمالات</p>								
6x0,25									
0,5	$P(C \cap R) = \frac{25}{100} \times \frac{84}{100}$ (2)								
4x0,25	$P(R) = \frac{30}{100} \times \frac{25}{100} + \frac{45}{100} \times \frac{18}{100} + \frac{25}{100} \times \frac{84}{100} = 0,366$ (3)								
0,25x2	$P_R(B) = \frac{45}{100} \times \frac{18}{100} = 0,081$ ، $P_R(B) = \frac{P(R \cap B)}{P(R)}$ (4)								
0,5	$P_R(B) = 0,22$								

		التمرين الرابع																
	2x025	(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$																
	0,5	(2) أ- $f'(x) = x^2 - \frac{57600}{(x+1)^2}$																
	0,25	$f'(x) = \frac{(x^2+x-240)(x^2+x+240)}{(x+1)^2}$																
	0,25	ب- $(x+1)^2 > 0$ و $x^2+x+240 > 0$ من أجل كل $x$ من $]-1; +\infty[$																
	0,5	<table border="1"> <tr> <td><math>x</math></td> <td>-1</td> <td>15</td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td><math>x^2+x-240</math></td> <td>  </td> <td>-</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td>+</td> </tr> </table>	$x$	-1	15	$+\infty$	$x^2+x-240$		-	0				+				
$x$	-1	15	$+\infty$															
$x^2+x-240$		-	0															
			+															
05	0,5	<table border="1"> <tr> <td><math>x</math></td> <td>-1</td> <td>15</td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td><math>f(x)</math></td> <td>  </td> <td><math>+\infty</math></td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td>↘</td> <td>↗</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td>4825</td> <td></td> </tr> </table>	$x$	-1	15	$+\infty$	$f(x)$		$+\infty$	$+\infty$			↘	↗			4825	
$x$	-1	15	$+\infty$															
$f(x)$		$+\infty$	$+\infty$															
		↘	↗															
		4825																
	3x0,25	ج- $H(x) = \ln(x+1) + c$ و $H(0) = 0$ ، $C = 0$																
	0,5	(3) أ- عدد الآلات هو 15																
	2x0,25	ب- $C$ الدالة الأصلية للدالة $C_m = f$ حيث $C(5) = 4 \cdot 10^4$																
	0,5	$C(x) = \frac{1}{12}x^4 + 100x + 57600 \ln\left(\frac{x+1}{6}\right) + \frac{473375}{12}$																
	0,25	$C(15) = 101662,43 \text{ DA}$																