الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: جوان 2015

الشعبة: تسيير واقتصاد

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 03 سا و30د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

يعطي الجدول التالي الاستهلاك y_i (باللتر l لكل $100km$) من الوقود لقاطرة منجمية بدلالة سرعتها x_i مقدّرة بـ km/h.

x_i مقدّرة بـ (km/h)	50	60	70	80	90
y_i مقدّر بـ ($l/100km$)	3,2	3,4	3,8	4,4	5,2

1) مثّل سحابة النقط $M_i\left(x_i;y_i\right)$ في معلم متعامد.

2) تعطى معادلة مستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا لـ y بدلالة x كالآتي: $y=0,05x+0,5$.

باستعمال هذا التعديل، ما هو تقديرك لاستهلاك هذه القاطرة من الوقود عندما تسير بسرعة قدرها $130km/h$؟

3) نبحث في هذا الجزء عن تعديل آخر.

أ) أتمم الجدول التالي: (تُدَوَّرُ كل نتائج الحسابات إلى 10^{-2} عند ملء الجدول فقط)

x_i مقدّرة بـ (km/h)	50	60	70	80	90
y_i مقدّر بـ ($l/100km$)	3,2	3,4	3,8	4,4	5,2
$z_i=\ln y_i$					

ب) عيّن $\left(\overline{x};\overline{z}\right)$ إحداثيي النقطة المتوسطة للسلسلة الإحصائية $\left(x_i;z_i\right)$.

ج) عيّن معادلة مستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا لـ z بدلالة x على الشكل $z=ax+b$.

د) عبّر عن y بدلالة x ؛ باستعمال هذا التعديل، ما هو تقديرك لاستهلاك القاطرة من الوقود عندما تسير بسرعة قدرها $130km/h$ ؟

هـ) في الواقع أنّه ابتداءً من السرعة $90km/h$، كلما ازدادت هذه الأخيرة بمقدار $10km/h$ ارتفع استهلاك القاطرة للوقود بمقدار $0,75\,l$.

من بين التعديلين السابقين؛ أيهما يعطي أفضل تقدير لاستهلاك القاطرة من الوقود حينما تسير بسرعة $130km/h$؟

التمرين الثاني: (06 نقاط)

اختر الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية:

1) نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بحدها العام: $u_n = 5\times 2^n \times 3^{n-1}$.

أ) (u_n) حسابية ، ب) (u_n) هندسية ، ج) (u_n) ليست هندسية ولا حسابية.

2) (v_n) متتالية حسابية حدّها الأوّل $v_0 = 1$ وأساسها 4 ؛ قيمة n التي من أجلها يكون $v_1 + v_2 + ... + v_n = 2015$

هي: أ) $n = 31$ ، ب) $n = 32$ ، ج) $n = 33$.

3) منحنى الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (x^2-1)^3$ ، يقبل مماسًا في النقطة ذات الفاصلة $\sqrt{2}$ معادلته:

أ) $y = \sqrt{2}x + 1$ ، ب) $y = 6\sqrt{2}x - 11$ ، ج) $y = 6\sqrt{2}x + 1$.

4) A و B حادثتان من مجموعة إمكانيات، حيث: $P(A) = 0,3$ و $P_A(B) = 0,4$.

أ) $P(A\cap B) = 0,12$ ، ب) $P(A\cap B) = 0,1$ ، ج) $P(A\cap B) = 0,7$.

5) A و B حادثتان مستقلتان من مجموعة إمكانيات، حيث: $P(A) = 0,3$ و $P(B) = 0,4$.

أ) $P(A\cup B) = 0,7$ ، ب) $P(A\cup B) = 0,58$ ، ج) $P(A\cup B) = 0,12$.

6) A و B حادثتان من مجموعة إمكانيات، حيث: $P_A(B) = 0,4$ ، $P(A) = 0,3$ و $P(A\cup B) = 0,68$.

أ) $P(B) = 0,204$ ، ب) $P(B) = 0,272$ ، ج) $P(B) = 0,5$.

التمرين الثالث: (09 نقاط)

f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \dfrac{4e^{-x}}{e^{-x}+1} - 3$.

(C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(x) = \dfrac{4}{e^x+1} - 3$.

ب) احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$ ؛ ثمّ فسّر النتيجتين هندسيا.

2) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أ) جد فاصلة نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل.

ب) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة $\Omega(0;-1)$.

ج) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(-x) + f(x) = -2$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل مركز تناظر.

د) ارسم المماس (T) والمنحنى (C_f) في نفس المعلم.

4) احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x = 0$ ، $x = -\ln 3$ و $y = 0$.

5) h الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = f(|x|)$ ، و (C_h) منحناها البياني في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ) بيّن أنّ h دالة زوجية.

ب) اعتمادًا على المنحنى (C_f)، اشرح كيف يتم رسم المنحنى (C_h) ثمّ ارسمه في نفس المعلم السابق.

الموضوع الثاني

التمرين الأوّل: (06 نقاط)

بيّنتْ دراسة أنّ 5% من عمال إحدى القطاعات الصناعية يُحالون على التقاعد سنويًا وبالمقابل يُوظّف 3000 عامل سنويًا. علماً أنّ سنة 2012 كان عدد العمال 50000.

نعتبر الألف هو الوحدة ونرمز بـ : u_n لعدد العمال سنة $2012+n$ أي $u_0=50$.

1) احسب u_1 و u_2 .

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=0,95u_n+3$.

ب) بيّن أنّ المتتالية (u_n) ليست حسابية وليست هندسية.

3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n=60-u_n$.

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل.

ب) اكتب v_n بدلالة n ؛ ثمّ استنتج u_n بدلالة n.

ج) قدِّر عدد العمال سنة 2017.

د) حدّد اتجاه تغير المتتالية (u_n).

هـ) احسب نهاية المتتالية (u_n). هل يمكن أن يصِل عدد عمال المصنع إلى 60000 عامل؟

التمرين الثاني: (05 نقاط)

مصنع سيارات يشتغل بوحدتين A و B وينتج نوعين: سيارات تسير بالبنزين يُرمز إليها بـ E وأخرى بغير البنزين $\overline{E}$.

رُبع إنتاج هذا المصنع تصنعه الوحدة A .

اشترى شخص سيارة من إنتاج هذا المصنع، احتمال أن تكون هذه السيارة من صنع الوحدة A وتسير بالبنزين يساوي $\frac{1}{6}$، واحتمال أن تكون من صنع الوحدة B وتسير بالبنزين يساوي $\frac{3}{8}$.

(تعطى كل النتائج على شكل كسر غير قابل للاختزال).

1) بيّن أنّ احتمال أن تكون السيارة تسير بالبنزين علماً أنّها من صنع الوحدة A يساوي $\frac{2}{3}$.

2) احسب احتمال أن تكون السيارة تسير بالبنزين علماً أنّها من صنع الوحدة B.

3) أ) احسب احتمال أن تكون السيارة تسير بالبنزين.

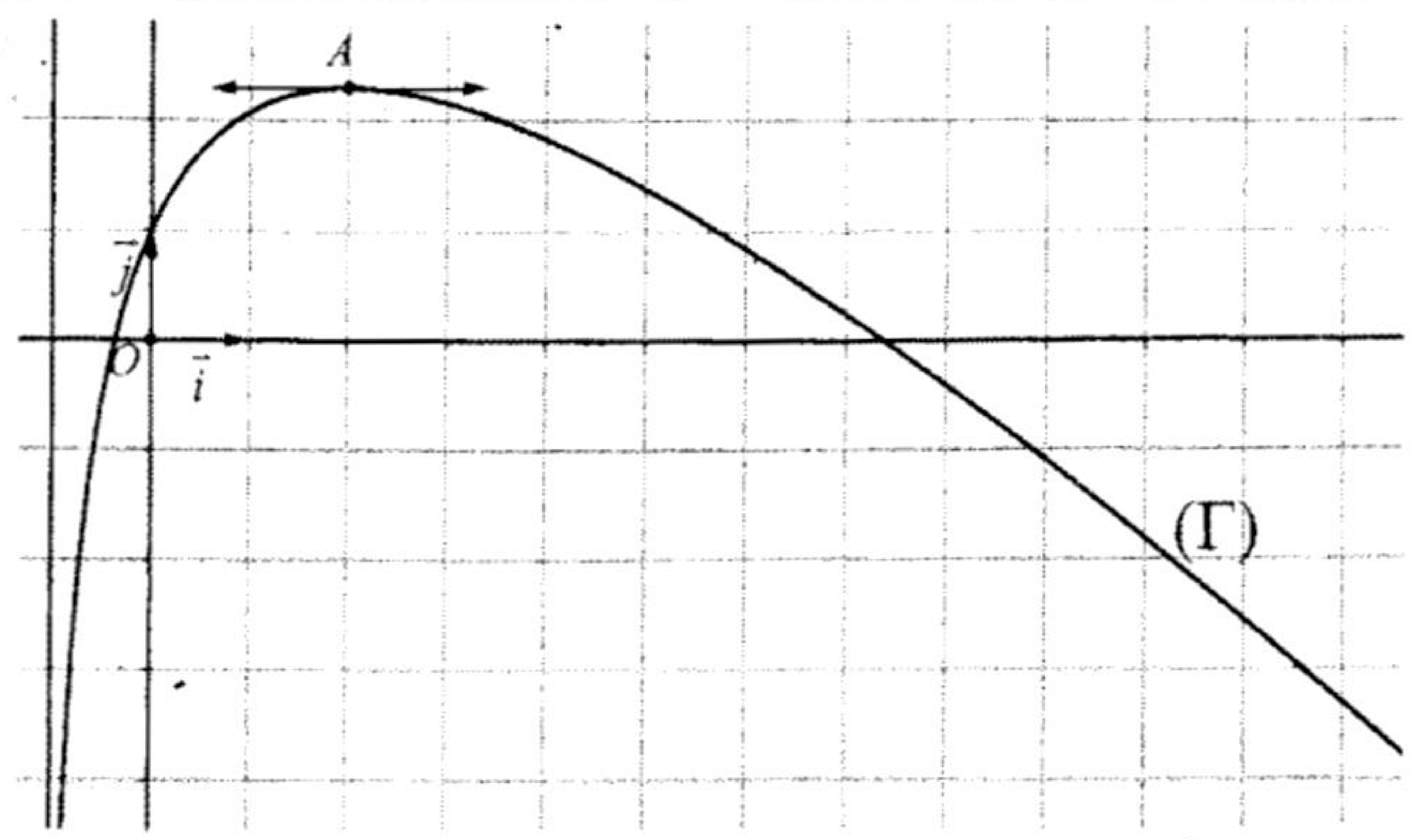
ب) علماً أنّ السيارة تسير بالبنزين ما احتمال أن تكون من صنع الوحدة A ؟

4) أنجز شجرة الاحتمالات التي تُنمذج هذه الوضعية.

التمرين الثالث: (09 نقاط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

I) f دالة معرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=ax+b+3\ln(x+1)$ ، حيث a و b عددان حقيقيان.



(Γ) التمثيل البياني للدالة f، المعطى في الشكل المقابل ، يقبل في النقطة $A(2;-1+3\ln 3)$ مماسًا موازيًا لحامل محور الفواصل.

1) بقراءة بيانية:

أ) ضع تخميناً حول:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$

ب) شكّل جدول تغيرات الدالة f .

2) باستعمال المعطيات المتوفرة، جد قيمة كل من a و b .

II) نعتبر في هذا الجزء : $f(x) = -x + 1 + 3\ln(x+1)$.

1) احسب نهاية الدالة f عند -1 بقيم أكبر.

2) احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$. (يُعطى $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0$)

3) أ) عيّن النقطة B من المنحنى (Γ) التي يكون فيها المماس (T) للمنحنى (Γ) موازيًا للمستقيم الذي معادلته $y = x$ ، ثم اكتب معادلة للمماس (T).

ب) استنتج بيانيا ، قيم العدد الحقيقي m التي تقبل من أجلها المعادلة $f(x) = x + m$ حلين موجبين تمامًا.

4) g الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$.

أ) احسب $g'(x)$ ؛ ثمّ استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$.

ب) لتكن α و β فاصلتي نقطتي تقاطع المنحنى (Γ) مع حامل محور الفواصل ،
بيّن أنّ: $\alpha \in]7,37 ; 7,38[$ و $\beta \in]-0,37 ; -0,36[$.

جـ) احسب S مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (Γ) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = 0$ ، $x = \alpha$.

د) تحقّق أنّ: $S = \left(\frac{1}{2}\alpha^2 - 2\alpha - 1\right) ua$ ؛ ثّم عيّن حصرًا لـ S .(ua وحدة مساحة)

III) تنتج إحدى الورشات في اليوم الواحد 7 آلاف قطعة على الأكثر.

تُنمذج الكلفة الهامشية C_m (الوحدة 1000 دينار) لإنتاج قطعة إضافية على المجال $[0;7]$ بالدالة f المعرّفة في الجزء II) ، أي من أجل $x \in [0;7]$ لدينا $C_m(x) = f(x)$.

نرمز بـ $C_T(x)$ إلى الكلفة الإجمالية لإنتاج x قطعة.

1) عيّن عبارة الكلفة الإجمالية $C_T(x)$ علماً أن الكلفة الإجمالية لإنتاج الألف قطعة الأولى هي $\frac{5}{2}$.

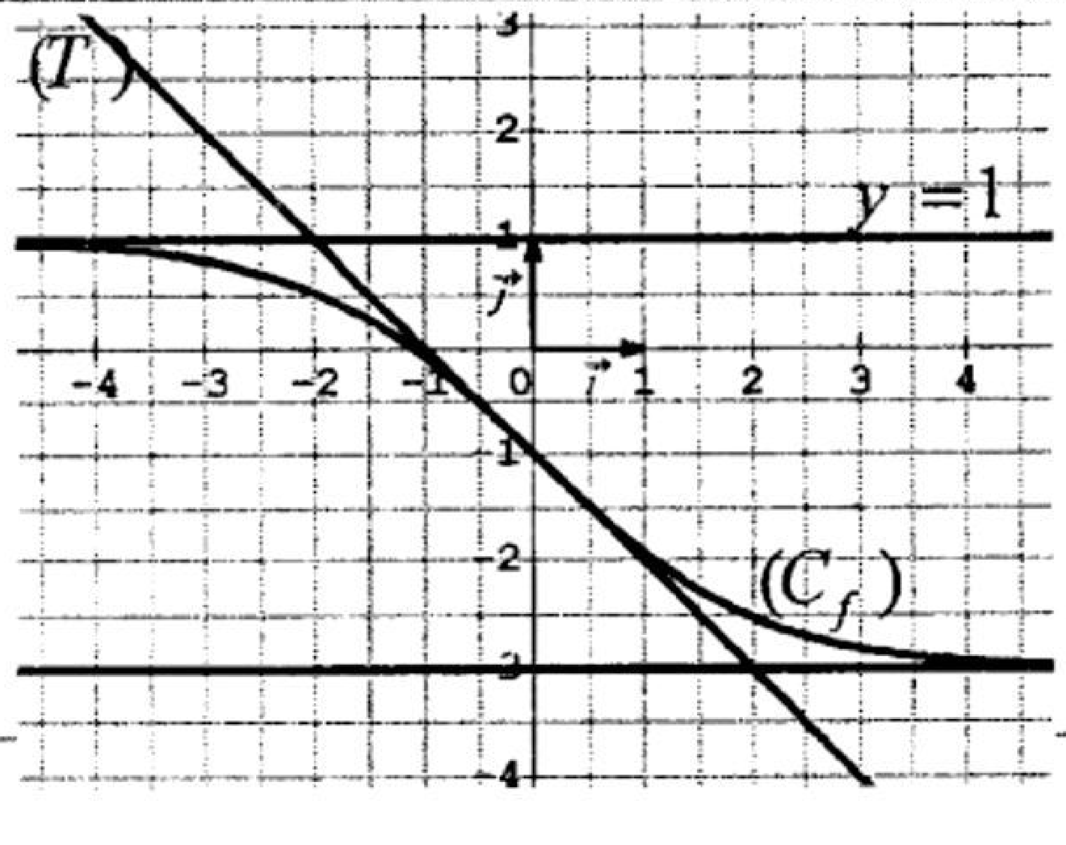
2) قدّر قيمة الكلفة الإجمالية لإنتاج 7 آلاف قطعة.

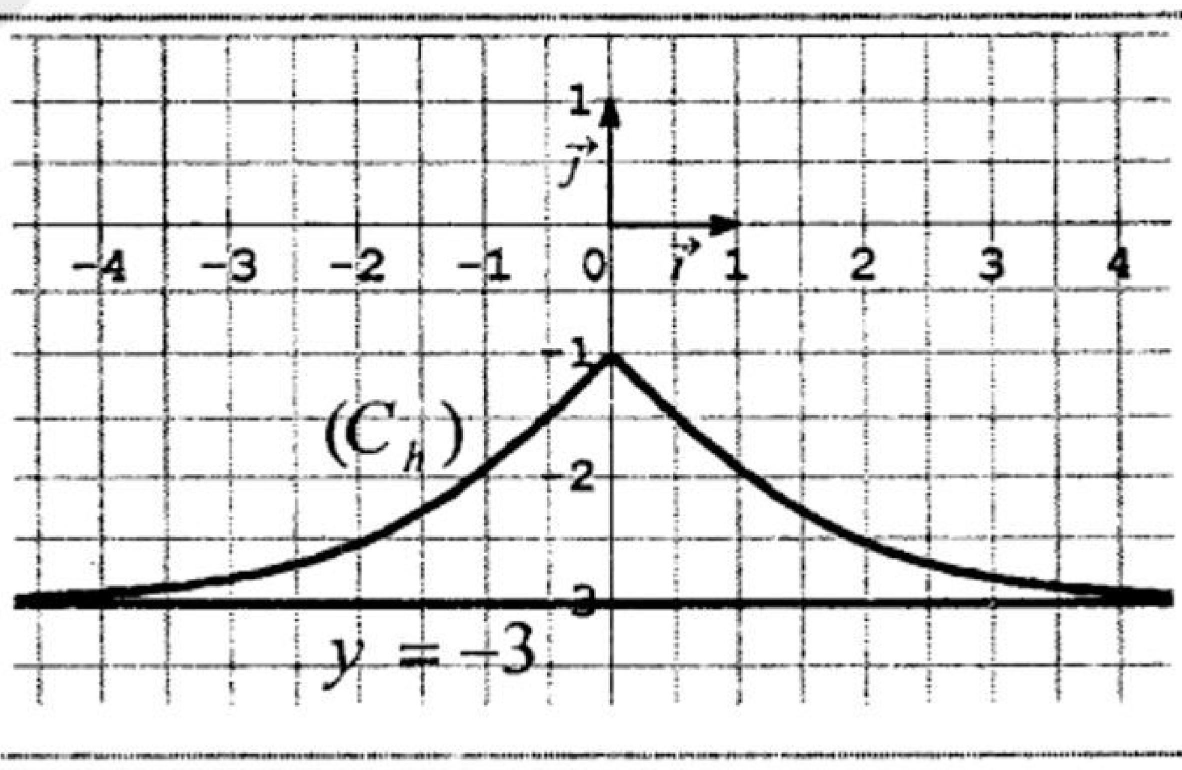
الإجابة النموذجية لموضوع امتحان البكالوريا دورة: **2015**

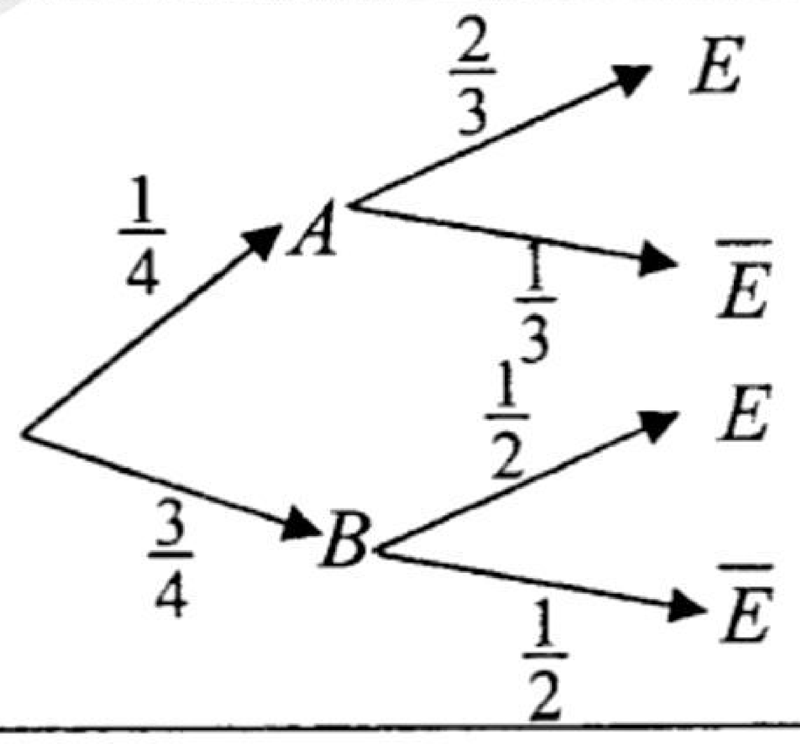
اختبار في مادة: الرياضيات   الشعبة: تسيير واقتصاد   المدة: 03 ساعات ونصف

(الموضوع الأول) عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
التمرين الأوّل: (05 نقاط)		05 نقاط
1. تمثيل سحابة النقط	0,5	
2. $y = 0,05\times130+0,5$ أي $y = 7$	0,5	
3. أ - $\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c\|c} x_i \text{ مقدّرة بـ } (km/h) & 50 & 60 & 70 & 80 & 90 \\ y_i \text{ مقدّر بـ } (l/100km) & 3,2 & 3,4 & 3,8 & 4,4 & 5,2 \\ z_i=\ln y_i & 1,16 & 1,22 & 1,34 & 1,48 & 1,65 \end{array}$	1,25	
ب - لدينا $\bar{x}=\frac{50+60+70+80+90}{5}=70$ و $\bar{z}=\frac{1,16+1,22+1,34+1,48+1,65}{5}=1,37$	0,5	
جـ - $a=\frac{\frac{1}{5}\left(\sum_{i=1}^{i=5}x_i z_i\right)-\bar{x}\,\bar{z}}{\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{i=5}(x_i-\bar{x})^2}$ أي $a=0,0124$	0,5	
$b=1,37-0,0124\times70$ أي $b=0,502$ ومنه $z=0,0124x+0,502$	0,5	
د - لدينا $z=\ln y$ وبالتالي $\ln y=0,0124x+0,502$ ومنه $y=e^{0,0124x+0,502}$	0,5	
لما $x=130$ فإن $y=e^{0,0124\times130+0,502}\approx8,28$	0,25	
هـ - الاستهلاك عند السرعة $130km/h$ هو $5,2+4\times0,75\,l=8,2\,l$	0,25	
لدينا التعديل الأول: $y=7$ والتعديل الثاني: $y\approx8,28$ وبالمقارنة نجد أنّ التعديل الثاني أفضل من الأوّل في تقدير الاستهلاك عند سرعة $130km/h$ لأنّه الأقرب إلى $8,2l$	0,25	
ملاحظة تخص السؤال ج) : مهما كانت رتبة التدوير التي يعطيها المترشح في حسابه لاستهلاك القاطرة يعتبر مقبولا.		
التمرين الثاني: (06 نقاط)		04 نقاط
1. ب) (u_n) هندسية	0,25	
$u_n=5\times2^n\times3^{n-1}$ تكافئ $u_n=\frac{5}{3}\times(2\times3)^n$ وهو الحد العام لمتتالية هندسية أو $u_{n+1}=6u_n$	0,75	
2. أ) $n=31$	0,25	
$v_1+v_2+...+v_n=\frac{n}{2}(v_1+v_n)=2n^2+3n=2015$ ومنه $n=31$	0,75	
3. ب) $y=6\sqrt{2}x-11$	0,25	
$f'(x)=3\times2x(x^2-1)=6x(x^2-1)$ ، $f(\sqrt{2})=1$ ، $f'(\sqrt{2})=6\sqrt{2}$ ومنه $y=6\sqrt{2}x-11$	0,75	
4. أ) $P(A\cap B)=0,12$	0,25	
$P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)=0,12$	0,75	

عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
تابع للموضوع الأول		
5. ب) $P(A\cup B)=0{,}58$	0,25	02 نقاط
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)$	0,75	
6. جـ) $P(B)=0{,}5$	0,25	
$P(B)=P(A\cup B)+P(A\cap B)-P(A)=P(A\cup B)+P(A)\times P_A(B)-P(A)$	0,75	
التمرين الثالث: (09 نقاط)		09 نقاط
1. أ - من أجل كل عدد حقيقي x فإنّ: $f(x)=\dfrac{4}{e^x+1}-3$	0,5	
ب - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-3$	0,5	
$y=1$ و $y=-3$ معادلتا المستقيمين المقاربين	0,5	
2. $f'(x)=\dfrac{-4e^x}{(e^x+1)^2}$ ؛ $f'(x)<0$	0,75	
f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$	0,25	
جدول التغيرات.	0,25	
3. أ - $f(x)=0$ معناه $x=-\ln 3$	0,5	
ب - معادلة المماس (T) $y=-x-1$.	0,75	
جـ - من أجل كل عدد حقيقي x فإن $f(-x)+f(x)=-2$ ،	0,5	
$\Omega(0;-1)$ مركز تناظر لـ (C_f)	0,5	
د - الرسم	1,25	
4. $A=-\int_{-\ln 3}^{0} f(x)dx=\left[4\ln\left(e^{-x}+1\right)+3x\right]_{-\ln 3}^{0}$	0,75	
$A=\left(3\ln 3-4\ln 2\right)\ ua$	0,5	
5. أ - h دالة زوجية لأن $\mathbb{R}$ متناظر بالنسبة إلى 0 و $h(-x)=h(x)$	0,5	
ب - في $[0;+\infty[$ ينطبق (C_h) على (C_f) و (C_h) و (C_f) متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب	0,5	
الرسم	0,5	





(الموضوع الثاني) عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
التمرين الأوّل: (06 نقاط)		06 نقاط
.1 $u_1 = 0{,}95u_0 + 3 = 50{,}5$ ؛ $u_2 = 0{,}95u_1 + 3 = 50{,}975$	01	
.2 أ - $u_{n+1} = u_n - \frac{5}{100}u_n + 3$ ومنه $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 3$.	01	
ب -(u_n) ليست حسابية لأنّ $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ أو $u_{n+1} \neq u_n + r$	0,25	
(u_n) ليست هندسية لأنّ $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ أو $u_{n+1} \neq qu_n$	0,25	
.3 أ - $v_{n+1} = 0{,}95v_n$ ؛ $q = 0{,}95$ ، $v_0 = 10$	0,5×2	
ب - $v_n = 10 \times 0{,}95^n$ ؛ $u_n = 60 - 10 \times 0{,}95^n$	0,5×2	
جـ - لدينا $u_5 = 60 - 10 \times 0{,}95^5$ إذن عدد العمال في سنة 2017 هو: 52262.	0,5	
د - $u_{n+1} - u_n = 0{,}5 \times 0{,}95^n > 0$ ومنه (u_n) متزايدة تماما.	0,5	
هـ - $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(60 - 10 \times 0{,}95^n\right) = 60$	0,25	
عدد العمال في هذا القطاع الصناعي لن يصل 60000 عاملا	0,25	
التمرين الثاني: (05 نقاط)		05 نقاط
.1 $P_A(E) = \frac{P(A \cap E)}{P(A)} = \frac{2}{3}$	01	
.2 $P_B(E) = \frac{P(B \cap E)}{P(B)} = \frac{1}{2}$	01	
.3 أ - $P(E) = P(A \cap E) + P(B \cap E) = \frac{13}{24}$	01	
ب - $P_E(A) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{4}{13}$	01	
.4 	01	

تابع للموضوع الثاني — عناصر الإجابة	العلامة: مجزأة	العلامة: مجموع
التمرين الثالث: (09 نقاط)		
I) 1. أ - $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x) = -\infty$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$	0,5	
ب - جدول التغيرات	0,5	
2. $f'(x) = a + \frac{3}{x+1}$	0,5	
من $f'(2) = 0$ نجد $a = -1$	0,5	
من $f(2) = -1 + 3\ln 3$ نجد $b = 1$	0,5	
II) 1. $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x) = -\infty$	0,25	
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$	0,5	
3. أ - $f'(x) = 1$ نجد $x = \frac{1}{2}$ ومنه $B\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2} + 3\ln\frac{3}{2}\right)$	0,5	
$y = x + 3\ln\frac{3}{2}$	0,5	
ب - $f(x) = x + m$ تقبل حلين موجبين تماما من أجل $1 < m < 3\ln\frac{3}{2}$	0,75	**09 نقاط**
4. أ - $g'(x) = \ln(x+1)$	0,25	
F دالة أصلية لـ f على $]-1;+\infty[$: $F(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3(x+1)\ln(x+1)$	0,5	
ب - $f(7,37) \approx 0,003$ ؛ $f(7,38) \approx -0,002$	0,5	
$f(-0,37) \approx -0,01$ ؛ $f(-0,36) \approx 0,02$	0,5	
جـ - $S = \int_0^\alpha f(x)dx$ ومنه $S = -\frac{1}{2}\alpha^2 - 2\alpha + 3(\alpha+1)\ln(\alpha+1)\ ua$	0,5	
د - $S = \left(\frac{1}{2}\alpha^2 - 2\alpha - 1\right) ua$	0,25	
$11,39845 < S < 11,4922$	0,5	
III) 1. $C_T(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3(x+1)\ln(x+1) + c$ مع $C_T(1) = \frac{5}{2}$ $c = 5 - 6\ln 2$ ومنه $C_T(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3(x+1)\ln(x+1) + 5 - 6\ln 2$	0,5	
2. $C_T(7) \approx 12,247713$ أي $C_T(7) \approx 12247,713\,DA$	0,5	