الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني لامتحانات والمسابقات

امتحان شهادة بكالوريا التعليم الثانوي دورة 2008

الشعبة : تقني رياضي

اختبار في مادة : الرياضيات — المدة : 04 ساعات و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

تمرين 1: (4 نقاط)

لتكن في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (*) المعرفة كما يلي:

$$Z^3+(2-4i)Z^2-(6+9i)Z+9(-1+i)=0 \quad \ldots \quad (*)$$

1/ بيّن أن $Z_0=3i$ هو حل للمعادلة (*)

2/ حل، في $\mathbb{C}$، المعادلة (*) ثم أكتب حلولها Z_0 ، Z_1 ، Z_2 على الشكل الأسي حيث $|Z_1|<|Z_2|$.

3/ لتكن A ، B ، C صور الحلول Z_0 ، Z_1 ، Z_2 على الترتيب في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. عيّن النقطة G مرجح الجملة $\left\{(A,1);(B,1);(C,-1)\right\}$.

4/ عين المجموعة (E) للنقط M حيث : $AM^2+BM^2-CM^2=-13$

بيّن أنّ النقطة A تنتمي إلى المجموعة (E) ثمّ أنشئ (E).

5/ تحقق أنّ النقط O ، B و G في استقامية ثمّ عيّن صورة المجموعة (E) بالتحاكي الذي مركزه النقطة O ويحوّل B إلى G محددا عناصره المميزة.

تمرين 2: (5 نقاط)

نعتبر الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

$A(1,2,2)$ ، $B(3,2,1)$ ، $C(1,3,3)$ نقط من هذا الفضاء.

1/ برهن أن النقط A ، B ، C تعين مستو يطلب تعيين معادلته الديكارتية.

2/ نعتبر المستويين (P_1) و (P_2) المعرفين بمعادلتيهما الديكارتيتين :

$$(P_1):\ x-2y+2z-1=0$$

$$(P_2):\ x-3y+2z+2=0$$

بيّن أنّ (P_1) و (P_2) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ).

3/ بيّن أنّ النقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ).

4/ بيّن أنّ الشعاع $\vec{u}(2,0,-1)$ هو أحد أشعة توجيه المستقيم (Δ).

5/ استنتج أنّ التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) هو الجملة:

$$\begin{cases} x=2k+1 \\ y=3 \\ z=-k+3 \end{cases}$$

حيث $(k\in\mathbb{R})$

6/ لتكن M نقطة من المستقيم (Δ) ، أوجد قيمة الوسيط k حتى يكون الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ متعامدين، ثم استنتج المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ).

تمرين 3: (7 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على المجال $[0;2]$ بالعبارة $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+2}$

1/ أ- ادرس تغيرات الدّالة f على المجال $[0;2]$

ب- أنشئ (C) المنحنى الممثل للدّالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.
(الوحدة على المحورين $4cm$)

ج- برهن أنّه إذا كان $x\in[0;2]$ فإنّ $f(x)\in[0;2]$.

2/ نعرّف المتتالية العددية (U_n) على $\mathbb{N}$ كالآتي :
$$\begin{cases}U_0=0\\ U_{n+1}=f(U_n)\end{cases}$$

أ - برّر وجود المتتالية (U_n). احسب الحدين U_1 و U_2

ب - مثّل الحدود U_0 ، U_1 و U_2 على محور الفواصل وذلك بالاستعانة بالمنحنى (C) والمستقيم (D) ذو المعادلة $y=x$.

ج - ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر (U_n) و تقاربها انطلاقا من التمثيل السابق.

3/ أ - برهن بالتراجع على العدد الطبيعي n أنّ : $0\leqslant U_n\leqslant\sqrt{3}$.

ب - برهن أنّه مهما يكن العدد الطبيعي n فإنّ : $U_{n+1}>U_n$.
ماذا تستنتج بالنسبة إلى تقارب (U_n) ؟

ج – تحقق أنّ: $U_{n+1}-\sqrt{3}\leqslant\dfrac{2-\sqrt{3}}{U_n+2}(U_n-\sqrt{3})$ من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم.

عيّن عددا حقيقيا k من $]0;1[$ بحيث: $|U_{n+1}-\sqrt{3}|\leqslant k|U_n-\sqrt{3}|$

بيّن أنه من أجل $n\in\mathbb{N}^*$: $|U_n-\sqrt{3}|\leqslant k^n|U_0-\sqrt{3}|$. استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$.

تمرين 4: (4 نقاط)

n عدد طبيعي أكبر من 5.

1/ a و b عددان طبيعيان حيث $a=n-2$ و $b=2n+3$

أ - ما هي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b ؟

ب - بيّن أن العددين a و b من مضاعفات 7 إذا وفقط إذا كان $n+5$ مضاعفا للعدد 7 .

ج – عيّن قيم n التي يكون من أجلها $PGCD(a;b)=7$

2/ نعتبر العددين الطبيعيين p و q حيث :
$$p=2n^2-7n-15 \quad \text{و} \quad q=n^2-7n+10$$

أ - بيّن أنّ كل من العددين p و q يقبل القسمة على $n-5$.

ب - عيّن تبعا لقيم n وبدلالة n ، $PGCD(p;q)$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

نعتبر المعادلة ذات المجهولين الصحيحين x و y : $4x-9y=319$ .... (I) .

1) – تأكد أن الثنائية $(82\ ,\ 1)$ حل للمعادلة (I).

– حل المعادلة (I).

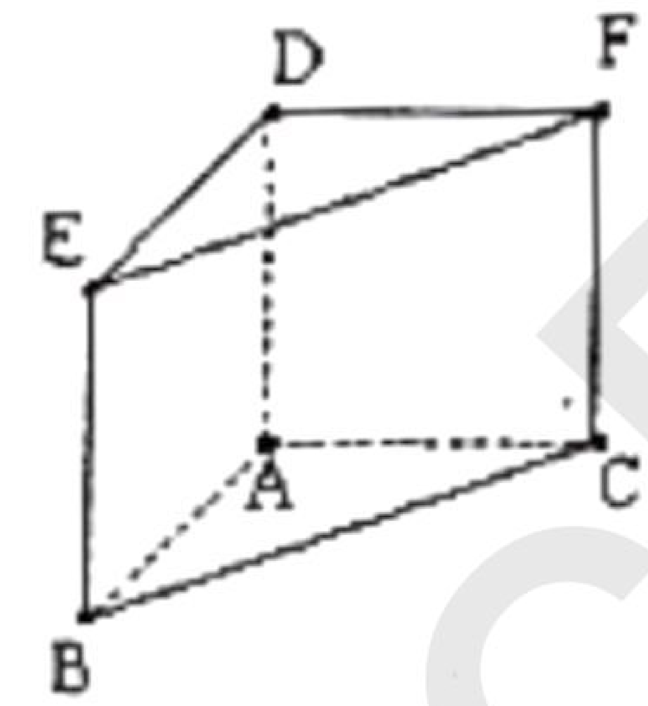
2) عين الثنائيات $(a\ ,\ b)$ الصحيحة،حلول المعادلة : $4a^2-9b^2=319$ .... (II)

3) استنتج الثنائيات (x_0,y_0) حلول المعادلة (I) بحيث x_0 و y_0 مربعين تامين.

التمرين الثاني : (04 نقاط)

$ABCDEF$ موشور قائم قاعدته المثلث ABC القائم في A والمتساوي الساقين وجهاه $ABED$ و $ACFD$ مربعان متقايسان طول ضلع كل منهما r حيث $r\in\mathbb{R}_+^*$.

(انظر الشكل)



1) يرمز I إلى منتصف $[AD]$ و J إلى مركز ثقل الرباعي $BCFE$. بيّن أنّ G مرجح الجملة $\{(A;2),(B;1),(C;1),(D;2),(E;1),(F;1)\}$ هو منتصف $[IJ]$

2) ينسب الفضاء إلى المعلم المتعامد المتجانس $(A;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD})$.

– عين إحداثيات النقط A ، B ، C ، D ، E ، F .

– عين مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق :

$$2MA^2+MB^2+MC^2+2MD^2+ME^2+MF^2=10r^2$$

التمرين الثالث : (04 نقاط)

r عدد حقيقي موجب تماما و θ عدد حقيقي كيفي.

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z:

$$z^2-2i\ (r\cos\frac{\theta}{2})z-r^2=0$$

اكتب الحلين على الشكل الأسي.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقطتين A و B صورتي الحلين.

عين θ حتى يكون المثلث OAB متقايس الأضلاع.

التمرين الرابع: (08 نقاط)

1) f الدالة العددية المعرفة على $]-2;+\infty[$ كما يأتي: $f(x)=\dfrac{x^2+5}{x+2}$.

C_f منحنى f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

(وحدة الأطوال $2cm$)

أ – احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف .

ب – ادرس اتجاه تغيّر f ثمّ شكل جدول تغيراتها.

جـ – بيّن أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=x-2$ مقارب للمنحنى C_f ثم ارسم C_f و (D).

د – بيّن أنّ صورة المجال $\left[1;\dfrac{5}{2}\right]$ محتواة في المجال $\left[1;\dfrac{5}{2}\right]$

2) نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة بحدّها الأول $U_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n

لدينا: $U_{n+1}=f(U_n)$.

أ – باستخدام C_f و المستقيم ذي المعادلة $y=x$ ، مثّل U_0 و U_1 و U_2 على حامل محور الفواصل (ox).

ب – خمّن اتجاه تغيّر وتقارب المتتالية (U_n).

جـ – بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $1\leqslant U_n\leqslant\dfrac{5}{2}$ و أن المتتالية (U_n)متزايدة .

د – استنتج أنّ (U_n) متقاربة و احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} Un$.

تكتب الإجابة النموذجية على هذه الورقة و لا تقبل سواها

الإجابة النموذجية لموضوع اختبار مادة: .الرياضيات الامتحان :.بكالوريا دورة:2008 الشعبة: تقني رياضي المدة: 04 ساعات و 30 د .

الإجابة النموذجية وسلم التنقيط

الموضوع الأول

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة المجموع
أعداد مركبة وتحويلات نقطية	**تمرين 1:** (4 نقاط)		
	1/ بالتعويض في المعادلة (*) نبيّن أنّ $Z_0 = 3i$ هو حل لها	0.5	
	2/ حلول (*) في $\mathbb{C}$ هي :		
	$(Z-3i)\left[Z^2+(2-i)Z-3-3i\right]=0$	0.25	
	$\Delta = 15+8i = (4+i)^2$ ، $Z_0 = 3i$ ، $Z_1 = 1+i$ ، $Z_2 = -3$	0.25×4	
	الشكل الأسي $Z_0 = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، $Z_1 = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $Z_2 = 3e^{i\pi}$	0.25×3	
	3/ تعيين النقطة G : $G(4,4)$	0.25	
	4/ المجموعة (E) هي الدائرة ذات المركز G ونصف القطر $\sqrt{17}$	0.5	
	A نقطة من هذه الدائرة لأنّ $GA = \sqrt{17}$	0.25	
	5/ العبارة المركبة للتحاكي المطلوب هي : $z' = 4z$	0.25	
	صورة المجموعة (E) بهذا التحاكي هي الدائرة ذات المركز	0.25	04
	$G'(16;16)$ ونصف القطر $4\sqrt{17}$		
	تمرين2: (5 نقاط)		
	1/ نلاحظ أنّ $\overrightarrow{AB}(2,0,-1)$ و $\overrightarrow{AC}(0,1,1)$ مستقلان خطيا	0.5	
	منه النقط A, B, C تعيّن مستو معادلته هي $x-2y+2z-1=0$	0.5	
	2/ (P_1) و (P_2) متقاطعان وفق مستقيم (Δ) لأنّ الشعاعين الناظمين عليهما		
	$\vec{n}_1$ و $\vec{n}_2$ غير متوازيين حيث $\vec{n}_1(1,-2,2)$ و $\vec{n}_2(1,-3,2)$	0.5	
	3/ C تنتمي إلى المستقيم (Δ) لأنها نقطة مشتركة بين (P_1) و (P_2)	0.5	

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة المجموع
هندسة فضائية	4/ يكفي إثبات أنّ الشعاع $\vec{u}(2,0,-1)$ عمودي على كل من الشعاعين		
	$\vec{n}_1(1,-2,2)$ و $\vec{n}_2(1,-3,2)$	0.25×3	
	5/ استنتاج أنّ التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) هو	0.75	
	$\begin{cases} x = 2k+1 \\ y = 3 \\ z = -k+3 \end{cases}$ حيث $k \in \mathbb{R}$		
	6/ قيمة الوسيط k حتى يكون $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ متعامدين هي $k = \frac{1}{5}$	0.75	
	المسافة بين A و (Δ) هي الطول $AM = \frac{3\sqrt{5}}{5}$	0.75	05
الدوال العددية	**<u>تمرين 3</u>: (7 نقاط)**		
	1/ أ – دراسة تغيرات f على المجال $[0;2]$		
	$f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$ - إشارة $f'(x)$ واتجاه التغيّر -	0.25×2+0.5	
المتتاليات العددية	جدول التغيرات	0.25	
	ب – إنشاء المنحنى (C)	0.75	
	ج – برهان أنه إذا كان $x \in [0;2]$ فإنّ $f(x) \in [0;2]$	0.5	
	من جدول التغيرات وحيث أنّ f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال المعطى $f(0) = \frac{3}{2}$ و $f(2) = \frac{7}{4}$ نستنتج أنّ صورة أي عدد حقيقي x من المجال $[0;2]$ بالدالة f هي العدد الحقيقي $f(x)$ من المجال $\left[\frac{3}{2};\frac{7}{4}\right]$ وحيث أنّ $\left[\frac{3}{2};\frac{7}{4}\right]$ محتوى في $[0;2]$ ينتج $f(x) \in [0;2]$.		
	2/ أ – نبرّر وجود المتتالية (U_n) بتوضيح أنّ كل حدودها تنتمي إلى المجال $[0;2]$ وهذا محقق بالنظر إلى جواب السؤال 1/ ج –	0.25	
	* حساب U_1 و U_2	0.25×2	
	ب – تمثيل الحدود U_0 ، U_1 و U_2	0.25×3	
	ج – <u>التخمين</u>: (U_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى وبالتالي فهي متقاربة	0.25	
	3/ أ - البرهان بالتراجع على العدد الطبيعي n أنّ : $0 \leqslant U_n \leqslant \sqrt{3}$	0.75	
	ب - البرهان أنّ : $U_{n+1} > U_n$ من أجل كل عدد طبيعي n	0.75	

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة المجموع
	بما أننا برهنا أنّ (U_n) محدودة من الأعلى بالعدد $\sqrt{3}$ ومتزايدة تماما نستنتج أنها متقاربة وهذا ما يؤكد صحة المخمّنة السابقة	0.25	
	ج ـ التحقق أنّ $U_{n+1}-\sqrt{3}\leqslant\frac{2-\sqrt{3}}{U_n+2}(U_n-\sqrt{3})$	0.25	
	تعيين عددا حقيقيا k يجيب عن السؤال	0.25	
	تبيان أنّ : $\left\|U_n-\sqrt{3}\right\|\leqslant k^n\left\|U_0-\sqrt{3}\right\|$	0.25	
	من المتباينة السابقة نستنتج أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\sqrt{3}$	0.25	07
القواسم والمضاعفات	**تمرين 4:** (4 نقاط)		
	1/ أ ـ القيم الممكنة للعدد $p\gcd(a,b)$ هي 1 أو 7	0.75	
	ب ـ نعتمد على المساواة $b-a=n+5$ لكي نبرهن أنّ العددين a و b من مضاعفات 7 إذا وفقط إذا كان $n+5$ مضاعفا للعدد 7	0.75	
	ج ـ تعيين قيم n التي يكون من أجلها $PGCD(a;b)=7$	0.25×2+0.25	
	بناء على جواب السؤال السابق فإنّ قيم n التي يكون من أجلها $PGCD(a;b)=7$ هي نفسها قيم n التي يكون من أجلها $n+5$ مضاعفا للعدد 7 أي $n+5\equiv0[7]$ ومنه $n=7k-5$ مع $k>1$.		
	2/ أ ـ العددان p و q يقبلان القسمة على $n-5$ لأنّ $q=(n-5)(n-2)$ و $p=(n-5)(2n+3)$	0.25×2	
	ب ـ تعيين تبعا لقيم n وبدلالة n $PGCD(p;q)$:		
	لدينا $PGCD(p;q)=(n-5)PGCD(a;b)$	0.25	
	نميّز حالتين هما:		
	1 ـ لمّا $\underline{PGCD(a;b)=7}$	0.5	
	نجد : $PGCD(p;q)=7(n-5)$ مع $n=7k-5$ أي $PGCD(p;q)=7(7k-10)$ و $k>1$		
	2 ـ لمّا $\underline{PGCD(a;b)\neq7}$ أي $PGCD(a;b)=1$	0.5	04
	نجد : $PGCD(p;q)=(n-5)$ مع $n\neq7k-5$.		
	انتهى		

146

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة المجموع
القواسم و المضاعفات	التمرين الأول :04 ن		
	1) التأكد من أن $(82,1)$ حل للمعادلة (I)	0.25	1.25
	حلول المعادلة (I) هي : $(x=9k+82\ ,\ y=4k+1)$ حيث $k\in\mathbb{Z}$	1	
	2) $(2a-3b)(2a+3b)=11\times 29$	0.75	1.75
	$S=\{(-80,-53);(-80.53);(-10,-3);(-10,3);(80,-53);(80,53);(10,3);(10,-3)\}$	1	
	3)الاستنتاج : $S'=\{(100,9);(6400,2809)\}$	1	1
هندسة فضائية	التمرين الثاني : 04 ن		1
	1) تبيان أنّ G منتصف $[IJ]$	1	
	2) $A(0,0,0)$; $B(r,0,0)$; $C(0,r,0)$; $D(0,0,r)$; $E(r,0,r)$: $F(0,r,r)$	6×0.25	3
	مجموعة النقط M هي سطح الكرة الذي مركزها $G\left(\frac{r}{4},\frac{r}{4},\frac{r}{2}\right)$ ونصف قطرها $\frac{r}{4}\sqrt{10}$	3×0.5	
الأعداد المركبة و الهندسة	التمرين الثالث : 04 ن		
	1) $\Delta'=r^2\sin^2\frac{\theta}{2}$ ، $z_1=r\sin\frac{\theta}{2}+ir\cos\frac{\theta}{2}$ و $z_2=-r\sin\frac{\theta}{2}+ir\cos\frac{\theta}{2}$	0.5×3	2.5
	الشكل الأسي : $z_1=r\,e^{i(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2})}$ و $z_2=r\,e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2})}$	0.5×2	
	2) المثلث متقايس الأضلاع : $\widehat{AOB}=\frac{\pi}{3}$ و $OA=OB$	0.5×2	1.5
	$\theta=\frac{\pi}{3}+2\pi k$; $\theta=-\frac{\pi}{3}+2\pi k$ / $k\in\mathbb{Z}$	0.25×2	
الدوال العددية	التمرين الرابع : 08 ن		
	1) أ - $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$	0.25×2	
	ب - $f'(x)=\frac{x^2+4x-5}{(x+2)^2}$ و إشارته	0.5×2	
	- جدول التغيرات	0.5	
	جـ - $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x-2)\right)=0$ و (D) مقارب مائل	1	
	رسم C_f	1	
	د - تبيان أنّ صورة المجال $\left[1;\frac{5}{2}\right]$ محتواة في $\left[1;\frac{5}{2}\right]$	0.75	4.75
	2) أ – تمثيل الحدود U_0 و U_1 و U_2	1	
	ب – تخمين اتجاه تغيّر وتقارب (U_n)	0.75	
	جـ – تبيان أن $1\le U_n\le\frac{5}{2}$ و (U_n) متزايدة	0.5×2	
	د - (U_n) متقاربة	0.25	
	$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=\frac{5}{2}$	0.25	3.25