



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

يحتوي الموضوع على (03) صفحات (من الصفحة 1 من 6 إلى الصفحة 3 من 6)

التمرين الأول: (04 نقاط)

(u_n) و (v_n) المتتاليتان العدديتان المعرفتان على \mathbb{N} كما يلي :

$$v_n = u_n - 3n + 1 \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 7u_n - 18n + 9 \end{cases}$$

(1) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

(2) اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

(3) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

(4) أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية لـ 7^n على 9.

ب) ما هو باقي القسمة الإقليدية على 9 للعدد $1442^{2019} + 1962^{1954} + 1954^{1962}$ ؟

ج) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $6S_n - 7u_n \equiv 0[9]$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

توجد إجابة صحيحة واحدة من بين الأجوبة المقترحة في كل حالة من الحالات التالية. اختر الإجابة الصحيحة

مبّررا اختيارك.

يحتوي كيس على ثلاث كريات بيضاء تحمل الأرقام 1, 2, 3 وكرتين سوداوين تحملان الرقمين 1, 2.

(الكرات لا نفرّق بينها عند اللمس) نسحب من الكيس 3 كريات عشوائيا وفي آن واحد.

X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات السوداء المسحوبة.

(1) قيم المتغير العشوائي X هي: أ) $\{1; 2; 3\}$ ، ب) $\{0; 2; 3\}$ ، ج) $\{0; 1; 2\}$

(2) الأمل الرياضي $E(X)$ لـ X هو: أ) $E(X) = \frac{4}{5}$ ، ب) $E(X) = \frac{6}{5}$ ، ج) $E(X) = \frac{11}{10}$.

(3) احتمال "الحصول على كرية واحدة سوداء تحمل الرقم 1 من الكريات المسحوبة"

يساوي: أ) $\frac{7}{10}$ ، ب) $\frac{9}{10}$ ، ج) $\frac{3}{5}$

- (4) احتمال "باقي قسمة مجموع مربعات الأرقام التي تحملها الكريات المسحوبة على 13 هو 1" يساوي: (أ) $\frac{2}{5}$ ، (ب) $\frac{3}{10}$ ، (ج) $\frac{1}{5}$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. A ، B و C النقط التي لاحقاتها على

$$\text{الترتيب: } z_A = 1+i, z_B = 2+i, \text{ و } z_C = \frac{3}{2} + i \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

(Γ) الدائرة التي مركزها A وطول نصف قطرها 1.

(1) (أ) تحقق أن النقطة C من الدائرة (Γ).

(ب) عين قيسا بالراديان للزاوية $(\overline{AB}; \overline{AC})$ ثم استنتج أن صورة B بالدوران r الذي مركزه A يطلب تعيين زاويته.

(2) S التشابه المباشر الذي يحول النقطة M ذات اللاحقة z إلى النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z' = (1+i\sqrt{3})z + \sqrt{3} - i\sqrt{3}$$

(أ) حدّد العناصر المميزة للتشابه S .

(ب) عين z_D لاحقة D صورة B بالتشابه S .

(3) ماهي نسبة التّحاكي h الذي مركزه A حيث $S = hor$ ؟ استنتج أن النقط A ، C و D في استقامية.

(4) (E) مجموعة النقط M من المستوي التي لاحقتها z حيث: $z = z_A + ke^{\frac{i\pi}{3}}$ مع $k \in \mathbb{R}_+^*$

- تحقق أن النقطة C من المجموعة (E). ثم حدّد طبيعة (E).

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = (x+3)e^x - 1$

و (C_g) تمثيلها البياني كما هو مبين في الشكل.

بقراءة بيانية

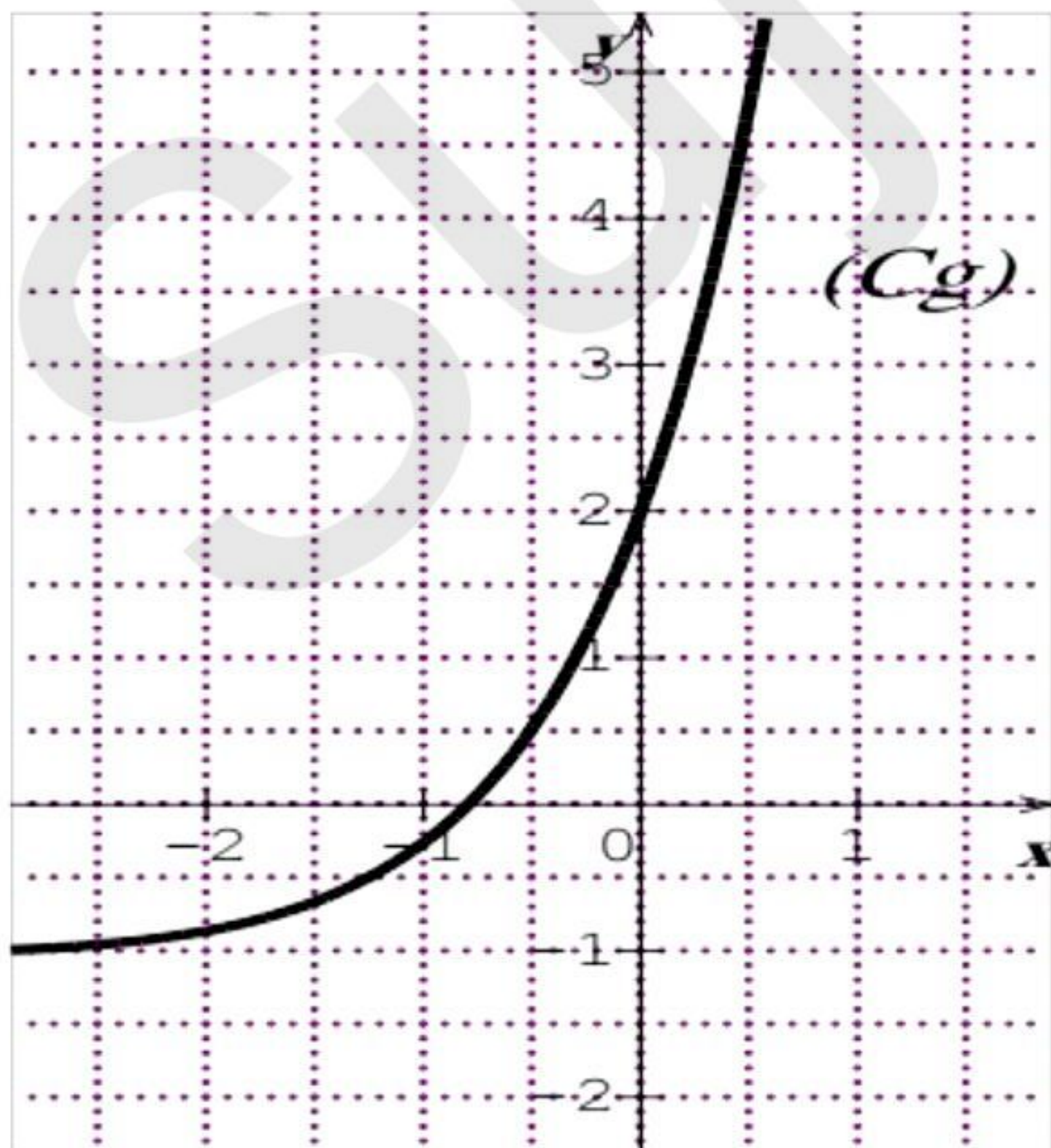
(أ) حدّد إشارة $g(-1)$ و $g\left(\frac{-1}{2}\right)$.

(ب) استنتج وجود عدد حقيقي α وحيد من المجال $\left]-1; \frac{-1}{2}\right[$

بحيث $g(\alpha) = 0$ ثم تحقق أن: $-0,8 < \alpha < -0,7$.

(ج) استنتج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .

(II) الدالة المعرفة على \mathbb{R} ب: $f(x) = (x+2)(e^x - 1)$



و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = g(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

(3) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x)$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

ب) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) .

ج) اكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) الموازي للمستقيم (Δ) .

(4) ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) على المجال $]-\infty; 1]$ (يعطى $f(\alpha) \approx -0.7$)

(5) احسب $f(x) - g(x)$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على \mathbb{R} .

(6) الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $h(x) = |x|(e^{|x|-2} - 1) + 1$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) بين أن الدالة h زوجية.

ب) تأكد أنه من أجل كل x من المجال $[0; +\infty[$ فإن: $h(x) = f(x-2) + 1$.

ج) اشرح كيف يمكن رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) ثم ارسم (C_h) على المجال $[-3; 3]$.

الموضوع الثاني

يحتوي الموضوع على (03) صفحات (من الصفحة 4 من 6 إلى الصفحة 6 من 6)

التمرين الأول: (04 نقاط)

- (1) نعتبر المعادلة ذات المجهول (x, y) : $(E) : 5x - 3y = 1$ حيث x و y عدنان صحيحان.
 - (أ) تحقق أن الثنائية $(6n + 2 ; 10n + 3)$ حل للمعادلة (E) حيث n عدد طبيعي.
 - (ب) استنتج أن العددين $6n + 2$ و $10n + 3$ أوليان فيما بينهما.
- (2) نضع $a = 10n + 3$ و $b = 3n + 5$ وليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b .
 - (أ) بين أن $d = 1$ أو $d = 41$.
 - (ب) بين أنه إذا كان $d = 41$ فإن $n \equiv 12 [41]$.
- (3) ليكن العدنان الطبيعيان $A = 20n^2 + 36n + 9$ و $B = 6n^2 + 19n + 15$.
 - (أ) بين أن العددين A و B يقبلان القسمة على $2n + 3$.
 - (ب) جد بدلالة n و حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

- يحتوي كيس على أربع كريات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 4 وثلاث كريات حمراء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 وكريتين سوداوين تحملان الرقمين 1 ، 2 (كل الكريات متشابهة لا نفرق بينها عند اللمس).
نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من هذا الكيس .
- (1) احسب احتمال الحوادث التالية:
 - (أ) الحادثة A : " الحصول على كرية بيضاء واحدة ".
 - (ب) الحادثة B : " الحصول على كرتين بيضاوين على الأكثر ".
 - (ج) الحادثة C : " الحصول على ثلاث كريات تحمل أرقاما غير أولية ".
 - (2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات التي تحمل أرقاما أولية.
 - (أ) عين قيم المتغير العشوائي X ، ثم عرّف قانون احتمالته.
 - (ب) احسب $P(X^2 - X \leq 0)$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

- (I) (أ) تحقق أن: $(2 - 2\sqrt{3})^2 = 16 - 8\sqrt{3}$.
- (ب) عين على الشكل الجبري الجذرين التربيعيين L_1 و L_2 للعدد المركب Z حيث: $Z = -16\sqrt{3} - 16i$

(II) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي

$$\cdot z_C = -\frac{1}{4}z_A \text{ و } z_B = \frac{1}{2}iz_A \text{ ، } z_A = 4e^{i\frac{\pi}{3}} + 4e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$(1) \text{ اكتب } z_A \text{ على الشكل الجبري ، ثم بيّن أن } z_A = 4\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

$$(2) \text{ استنتج القيمتين المضبوطتين للعددين الحقيقيين } \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) \text{ و } \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$$

$$(3) S \text{ التشابه المباشر الذي يحوّل } A \text{ إلى } B \text{ و يحوّل } B \text{ إلى } C .$$

لتكن M' النقطة ذات اللاحقة z' صورة النقطة M ذات اللاحقة z بالتشابه S .

$$(أ) \text{ بيّن أن: } z' = \frac{1}{2}iz$$

(ب) حدّد العناصر المميزة للتشابه S .

$$(4) G \text{ النقطة ذات اللاحقة } z_G \text{ مرجح الجملة } \{(A;2), (B;-2), (C;4)\}$$

$$(أ) \text{ بيّن أن: } z_G = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

(ب) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث:

$$\|\overline{MA} - \overline{MB} + 2\overline{MC}\| = 2\sqrt{2}$$

- حدّد طبيعة (E) وعناصرها المميزة، ثم احسب محيط (E') صورة (E) بالتشابه S .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) الدالة المعرفة والمتزايدة تماما على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = (x+1)(x+e) - e(x \ln x)$

احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

(II) الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \ln(x+1) + \frac{e \ln x}{x+1}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

$$(1) (أ) \text{ احسب } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \text{ ، ثم بيّن أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$(ب) \text{ بيّن أنه من أجل كل } x \text{ من }]0; +\infty[: f'(x) = \frac{g(x)}{x(x+1)^2}$$

(ج) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(2) اكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

(3) (أ) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة A فاصلتها α

(ب) تحقّق أنّ: $0,7 < \alpha < 0,8$.



(4) (Γ) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln(x+1)$ على المجال $[0; +\infty[$

(أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln(x+1))$ ثم فسّر النتيجة بيانياً.

(ب) ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (Γ) .

(ج) ارسم المماس (T) و (Γ) ثم (C_f) .

(5) m وسيط حقيقي، عين قيم m بحيث تقبل المعادلة $f(x) = \frac{1+e}{2}x - m$ حلين متمايزين.

(6) نقبل أنه من أجل كل x من المجال $]1; +\infty[$: $\ln x < x+1$.

(أ) بين أنه من أجل كل x من المجال $]1; +\infty[$: $\ln 2 < f(x) < e + \ln(x+1)$.

(ب) تحقق أنه من أجل كل x من المجال $]1; +\infty[$ الدالة : $x \mapsto (x+1)\ln(x+1) - x$ هي دالة أصلية

للدالة $x \mapsto \ln(x+1)$.

(ج) S مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين

معادلتهما: $x = e - 1$ و $x = e^2 - 1$.

- باستخدام جواب السؤال (6 - أ)، بين أن : $(e^2 - e)\ln 2 < S < e^3$.

الإجابة النموذجية لموضوع اختبار مادة: الرياضيات // الشعب (ة): تقني رياضي // بكالوريا: 2019

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الأول)
مجموع	مجزأة	
التمرين الأول: (04 نقاط)		
04	0.5+2× 0.25	(1) اثبات أن (v_n) متتالية هندسية و حساب v_0
	0.5+2× 0.25	(2) كتابة v_n بدلالة n و استنتاج u_n بدلالة n
	0.25	(3) حساب المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$
	01	(4) أ) دراسة بواقي القسمة الإقليدية لـ 7^n على 9.
	0.5	ب) باقي القسمة الإقليدية على 9 لـ $1442^{2019} + 1962^{1954} + 1954^{1962}$
	0.25	ج) اثبات انه من اجل كل عدد طبيعي n : $6S_n - 7u_n \equiv 0[9]$
التمرين الثاني: (04 نقاط)		
04	3 × 0.5	(1) قيم المتغير العشوائي تنتمي إلى $\{0; 1; 2\}$
	0.5 4 × 0.25	(2) مجموعة الامكانيات الأمّل الرياضياتي $E(x)$ لـ X هو: $E(x) = \frac{6}{5}$
	0.5	(3) الاحتمال يساوي $\left(\frac{C_1^1 \cdot C_4^2}{C_5^3} = \frac{3}{5}\right)$
	0.5	(4) (عدد الحالات الملائمة للحدث هو 4) ومنه الاحتمال يساوي $\frac{2}{5}$
التمرين الثالث: (04 نقاط)		
04	0.5	(1) أ) التحقق أن النقطة C من الدائرة (Γ)
	0.75 0.75	ب) تعيين قيس بالراديان للزاوية $(\overline{AB}; \overline{AC})$ استنتاج أن C صورة B بالدوران r الذي مركزه A يطلب تعيين زاويته.
	0.5+2× 0.25	(2) أ) تعيين العناصر المميزة للتشابه S
	0.5	ب) تعيين z_D ، $z_D = 2 + (1 + \sqrt{3})i$
	0.25	(3) التحاك h مركزه A حيث $S = hor$ نسبه 2 استنتاج أن النقط A ، C و D في إستقامية.
	0.25	(4) التحقق أن النقطة C من المجموعة (E) استنتاج طبيعة المجموعة (E)
التمرين الرابع: (08 نقاط)		
1.75	2× 0.25	(I) أ) اشارة $g(-1)$ ، $g(-0.5)$
	0.75	ب) استنتاج وجود عدد حقيقي α وحيد من المجال $]-0,5[; -1[$ بحيث $g(\alpha) = 0$ و التحقق من الحصر
	0.5	ج) استنتاج اشارة $g(x)$.

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الأول)
مجموع	مجزأة	
04.75	2×0.5	(II) (1) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
	2×1	(2) إثبات أن من اجل كل عدد حقيقي : $f'(x) = g(x)$ جدول تغيرات الدالة f
	2×0.25	(3) أ) حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)+x)$ استنتاج ان المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ)
	0.25	ب) دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .
	0.5	ج) كتابة معادلة لـ (T) مماس (C_f) الموازي للمستقيم (Δ) .
	0.5	(4) انشاء المستقيم (Δ) والمماس (T) و المنحنى (C_f)
0.75	0.75	(5) حساب $f(x) - g(x)$ ثم استنتاج دالة أصلية للدالة f .
0.75	0.25	(6) أ) إثبات أن الدالة h زوجية.
	0.25	ب) إثبات انه من اجل كل x من $[0; +\infty[$ فإن : $h(x) = f(x-2) + 1$
	0.25	ج) كيفية رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) أنشاء (C_h) في المجال $[-3; 3]$

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)
مجموع	مجزأة	
التمرين الأول: (04 نقاط)		
04	1 1	(1) أ) التحقق أن $(6n+2, 10n+3)$ حل للمعادلة (E) ب) استنتج أن $6n+2$ و $10n+3$ أوليان فيما بينهما.....
	0.75 0.75	(2) أ) تبيان أن $d=1$ أو $d=41$ ب) إثبات أن إذا كان $d=41$ فإن $n \equiv 12[41]$
	0.25 0.25	(3) أ) A و B يقبلان القسمة على $2n+3$ ب) $\text{pgcd}(A, B)$ حسب قيم n
التمرين الثاني: (04 نقاط)		
04	1 0.75	(1) مجموع الامكانيات أ) احتمال الحصول على كرة بيضاء واحدة فقط هو $\frac{C_4^1 \times C_5^2}{C_9^3} = \frac{10}{21}$
	0.5 0.5	ب) احتمال الحصول على كرتين بيضاوين على الأكثر هو $1 - \frac{C_4^3}{C_9^3} = \frac{20}{21}$
	0.5	ج) احتمال الحصول على ثلاث كريات تحمل أرقاما غير أولية $p(C) = \frac{C_4^3}{84} = \frac{1}{21}$
	0.5 0.5	(2) أ) قيم المتغير العشوائي X هي قيم المجموعة $\{0, 1, 2, 3\}$. قانون الاحتمال $\left(P(X=0) = \frac{4}{84}, P(X=1) = \frac{30}{84}, P(X=2) = \frac{40}{84}, P(X=3) = \frac{10}{84} \right)$ ب) $P(X^2 - X \leq 0) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{4}{84} + \frac{30}{84} = \frac{34}{84}$
التمرين الثالث: (05 نقاط)		
03	0.5	(I) أ) التحقق ان $(2-2\sqrt{3})^2 = 16 - 8\sqrt{3}$
	2×0.5	ب) $L_1 = (2-2\sqrt{3}) + i(2+2\sqrt{3})$ و $L_2 = (2\sqrt{3}-2) - i(2+2\sqrt{3})$
	0.5	(II) أ) $z_A = (2-2\sqrt{3}) + i(2+2\sqrt{3})$
	0.5 0.5	ب) استنتاج القيمتين المضبوطتين: $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ و $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)
مجموع	مجزأة	
02	0.5	(2) S تشابه مباشر الذي يحول A الى B و يحول B الى C . أ) العبارة المركبة للتشابه S هي : $z' = \frac{1}{2}iz$
	0.5	ب) العناصر المميزة للتشابه S : نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ و مركزه $O(0;0)$
	0.5	(3) لتكن G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;2), (B;-2), (C;4)\}$. أ) $z_G = 1+i\sqrt{3}$ ومنه $z_G = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$
	0.5	ب) $\ \overline{MA} - \overline{MB} + 2\overline{MC}\ = 2\sqrt{2}$ تكافئ $MG = \sqrt{2}$ (E) دائرة مركزها G وطول نصف قطرها $R = \sqrt{2}$ ، محيط (E') هو $\pi\sqrt{2}$ وحدة الطول.
التمرين الرابع: (07 نقاط)		
06	0.5+0.75	(I) الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ ب: $g(x) = (x+1)(x+e) - e(x \ln x)$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = e$ ، من أجل كل على المجال $]0; +\infty[$. فان $g(x) > 0$
	2x0.5	(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ ب: $f(x) = \ln(x+1) + \frac{e \ln x}{x+1}$ أ) (1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ ، تبيان ان $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
	0.75	ب) من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x(x+1)^2}$
	2x0.5	ج) الدالة f متزايدة تماما على $]0; +\infty[$ ، تشكيل جدول تغيرات الدالة f .
	0.25	(2) معادلة للمماس $(T) : y = \frac{1}{2}(e+1)x - \frac{1}{2}(e+1) + \ln 2$: (T)
	0.25	(3) أ) الدالة f على $]0; +\infty[$ مستمرة و متزايدة تماما و غيرت من اشارتها اذن المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة A ذات الفاصلة α
	0.25	ب) التحقق ان $0.7 < \alpha < 0.8$
	2x0.25	(4) أ) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln(x+1)] = 0$ و التفسير الهندسي
	0.25	ب) دراسة الوضع النسبي للمنحنيين (Γ) و (C_f)
	2x0.25	ج) رسم (T) و (Γ) و (C_f)

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)
مجموع	مجزأة	
1	0.25	(5). للمعادلة $f(x) = \frac{1+e}{2}x - m$ حلين من أجل $m \in \left] \frac{1}{2}(1+e) - \ln 2; +\infty \right[$
	0.25	(6). نقبل انه من أجل كل x من المجال $]1; +\infty[$: $\ln x < x+1$
	0.25	(أ) نبين أنه من أجل كل x من المجال $]1; +\infty[$: $\ln 2 < f(x) < e + \ln(x+1)$ (ب) التحقق أنه من أجل كل x من المجال $]1; +\infty[$ أن الدالة : $x \mapsto \ln(x+1) - x + (x+1)\ln(x+1)$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln(x+1)$.
	0.25	(ج) باستخدام السؤال (6) (أ) نبين أن : $(e^2 - e)\ln 2 < S < e^3$ لدينا: $\int_{e-1}^{e^2-1} \ln 2 dx < S < \int_{e-1}^{e^2-1} e + \ln(x+1) dx$ ومنه $(e^2 - e)\ln 2 < S < e^3$