

موضوع البكالوريا في مادة الرياضيات شعبة رياضيات

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

دورة: جوان 2011

وزارة التربية الوطنية

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي

الشعبة: رياضيات

المدة: 4 ساعات ونصف

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04.5 نقطة)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \bar{u}, \bar{v})$.

$z_C = \sqrt{3}(1+i)$ ، $z_B = -1+i$ ، $z_A = 1-i$ ثلاث نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب:

1/ اكتب على الشكل الآسي الأعداد المركبة: z_C ، z_B ، z_A .

2/ أ/ احسب الطويلة وعمدة للعدد المركب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ ، ثم فسّر هندسيا النتائج المحصل عليها.

ب/ حدّد طبيعة المثلث ABC .

3/ عيّن لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ACBD$ معيناً.

4/ T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z'

حيث: $z' = (-1+i)z + 1 - 3i$

أ/ عين طبيعة التحويل T وعناصره المميزة.

ب/ استنتج طبيعة التحويل ToT وعناصره المميزة.

التمرين الثاني: (04.5 نقطة)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$

1/ نعتبر النقط $A(1;0;2)$ ، $B(1;1;4)$ ، $C(-1;1;1)$

أ/ أثبت أنّ النقط A ، B و C تعين مستويًا.

ب/ بيّن أنّ الشعاع $(3;4;-2)$ عمودي على كل من الشعاعين \overline{AB} و \overline{AC} ثم استنتج

معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

2/ نعتبر المستويين (P_1) و (P_2) حيث: $(P_1): 3x+4y-2z+1=0$ و $(P_2): 2x-2y-z-1=0$.

أ/ بيّن أنّ المستويين (P_1) و (P_2) متعامدان.

ب/ عيّن تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P_1) و (P_2) .

ج/ تحقّق أنّ النقطة $O(0;0;0)$ لا تنتمي إلى (Δ) .

د/ احسب المسافتين $d(O;(P_1))$ و $d(O;(P_2))$ واستنتج المسافة $d(O;(\Delta))$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

(U_n) متتالية حسابية متزايدة تماما حدودها أعداد طبيعية تحقق:

$$\begin{cases} m = PPCM(U_3, U_5) \\ d = PGCD(U_3, U_5) \end{cases} \text{ حيث: } \begin{cases} U_4 = 15 \\ m + d = 42 \end{cases}$$

1/ عيّن الحدين U_3 و U_5 ثم استنتج U_0

2/ اكتب U_n بدلالة n ، ثم بيّن أن: 2010 حد من حدود (U_n) و عيّن رتبته.

3/ عيّن الحد الذي ابتداء منه يكون مجموع 5 حدود متعاقبة من (U_n) يساوي 10080

4/ n عدد طبيعي غير معدوم.

أ) احسب بدلالة n المجموع S حيث: $S = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{2n}$

ب) استنتج بدلالة n المجموعين S_1 و S_2 حيث: $S_1 = U_0 + U_2 + U_4 + \dots + U_{2n}$

$$\text{و } S_2 = U_1 + U_3 + U_5 + \dots + U_{2n-1}$$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = (3x + 4)e^x$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1/ أ) احسب f' ، f'' ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن:

$$f^{(n)}(x) = (3x + 3n + 4)e^x \text{ حيث: } f', f'', \dots, f^{(n)} \text{ المشتقات المتتالية للدالة } f$$

ب) استنتج حل المعادلة التفاضلية: $y'' = (3x + 16)e^x$

2/ أ) بيّن أن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ وفسر النتيجة هندسيا

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

3/ أ) اكتب معادلة للمماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة ω التي فاصلتها $-\frac{10}{3}$.

ب) بين أن ω هي نقطة انعطاف المنحنى (C_f)

ج) ارسم (Δ) و (C_f) على المجال $]-\infty; 0]$.

4/ أ) x عدد حقيقي من المجال $]-\infty; 0]$ ، باستعمال التكامل بالتجزئة جد $\int_{-1}^x te^t dt$ ثم استنتج دالة أصلية

للدالة f على المجال $]-\infty; 0]$.

ب) λ عدد حقيقي أصغر تماما من $-\frac{4}{3}$

احسب بدلالة λ المساحة $A(\lambda)$ للحيز من المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمت التي

$$\text{معادلاتها: } y = 0, x = -\frac{4}{3} \text{ و } x = \lambda, \text{ ثم جد } \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda)$$

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

(1) نعتبر المعادلة : (E) $13x - 7y = -1$... حيث: x و y عدنان صحيحان.
حل المعادلة (E).

(2) عيّن الأعداد الصحيحة النسبية a بحيث: $\begin{cases} a \equiv -1[7] \\ a \equiv 0[13] \end{cases}$

(3) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على كل من 7 و 13.
(4) ليكن العدد الطبيعي b المكتوب، في نظام التعداد ذي الأساس 9، كما يلي : $\alpha 00\beta 086$
حيث: α و β عدنان طبيعيان؛ $\alpha \neq 0$.
عيّن α و β حتى يكون b قابلاً للقسمة على 91.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
نعتبر النقط $A(1;0;0)$ ، $B(0;2;0)$ ، $C(0;0;3)$ و $G\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1\right)$
(D) المستقيم الذي يشمل النقطة A وشعاع توجيهه $\vec{u}\left(-1; 1; \frac{3}{2}\right)$ و (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة C
وشعاع توجيهه $\vec{v}\left(\frac{1}{2}; 1; -3\right)$

- 1- اكتب تمثيلاً وسيطياً لكل من المستقيمين (D) و (Δ) ثم ادرس الوضع النسبي لهما.
- 2- بين أن: $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للنقطة G؟
- 3- عين شعاعاً ناظماً \vec{n} للمستوي (ABC) ثم اكتب معادلة له.
- 4- احسب المسافة بين النقطة O والمستوي (ABC).
- 5- H المسقط العمودي للنقطة B على المستقيم (D).
(أ) جد إحداثيات النقطة H.
(ب) استنتج المسافة بين النقطة B والمستقيم (D).

التمرين الثالث: (04 نقاط)

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية:

1/ أ) الشكل المثلثي للعدد المركب $a = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ هو $-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$

(ب) $a^{2011} + \bar{a} = 0$ حيث: \bar{a} مرافق a

2/ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \bar{u}, \bar{v})$.

أ) التحويل T الذي كتابته المركبة: $z' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right)z$ دوران زاويته $-\frac{\pi}{4}$ ومركزه مبدأ المعلم

ب) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $\arg(z - i) = \frac{-\pi}{4}$ هي المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A

ذات اللاحقة i وشعاع توجيهه \bar{u} للاحقته $1+i$.

3/ المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = \frac{1}{12}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{6}$

$$u_n = -\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{2}{3} \quad \text{أ)}$$

ب) (u_n) متناقصة تماماً على \mathbb{N}

ج) (u_n) متباعدة

التمرين الرابع: (07 نقاط)

1/ g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 + \ln x^2 - 1$

أ/ ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

ب/ احسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ في المجال $]0; +\infty[$

2/ f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \ln x$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد المتجانس $(O; \bar{i}, \bar{j})$.

أ/ بين أن f قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ وأن: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.

استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

ب/ (δ) المنحنى الممثل للدالة $x \mapsto \ln x$ على المجال $]0; +\infty[$

- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (δ) ثم جد $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \ln x$ ، ماذا تستنتج ؟

- ارسم (δ) و (C_f) .

3/ أ/ x عدد حقيقي من المجال $[1; +\infty[$ ، باستعمال التكامل بالتجزئة جد $\int_1^x \frac{1}{t^2} \ln t dt$

- تحقق أن: $x \mapsto x \ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على المجال $[1; +\infty[$.

- استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $[1; +\infty[$.

ب/ α عدد حقيقي أكبر تماماً من 1.

احسب بدلالة α المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (δ) والمستقيمين

اللذين معادلتيهما: $x = 1$ و $x = \alpha$ ، ثم احسب $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A(\alpha)$

التصحيح النموذجي لموضوع الرياضيات لشعبة رياضيات بكالوريا 2011

الإجابة النموذجية و سلم التنقيط

امتحان شهادة البكالوريا دورة : 2011

المادة : الرياضيات الشعبة: رياضيات

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الأول)	معايير الموضوع
المجموع	مجزأة		
04.5	0.5×3	التمرين الأول : (04.5 نقطة) $z_C = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}, z_B = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}, z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ (1)	أعداد مركبة وتطبيقاتها الهندسية التشابه
	0.25×3	$\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$ و $\left \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right = 1$ $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ -أ (2)	
	0.25×2	التفسير الهندسي : $AB = AC$ و $(\overline{AC}; \overline{AB}) = \frac{\pi}{3}$	
	0.25	ب) ABC مثلث متقايس الأضلاع	
	0.25	$z_D = -\sqrt{3} - \sqrt{3}i$ (3)	
	0.25×3	أ- T تشابه مركزه A ونسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$	
0.5	ب- $T \circ T$ تشابه مركزه A ونسبته 2 وزاويته $\frac{3\pi}{2}$		
04.5	0.75	التمرين الثاني (04.5 نقطة) 1-أ- \overline{AB} لا يوازي \overline{AC} ومنه النقط A, B, C تعين مستويا.....	المستقيمات والمستويات في الفضاء تطبيقات الجداء السلمي في الفضاء
	0.25×2	ب- $\overline{n \cdot \overline{AB}} = 0$ و $\overline{n \cdot \overline{AC}} = 0$ ومنه \overline{n} شعاع ناظمي لـ (ABC)	
	0.5	$3x + 4y - 2z + 1 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)	
	0.25×2	2-أ- شعاع ناظمي لـ (P_1) و $\overline{n'}$ شعاع ناظمي لـ (P_2) و $\overline{n} \cdot \overline{n'} = 0$ ومنه (P_1) و (P_2) متعامدان.	
	0.25×3	ب- $\begin{cases} x = 8t \\ y = t - \frac{3}{8} \\ z = 14t - \frac{1}{4} \end{cases}$ وكذلك $\begin{cases} x = \frac{4}{7}t + \frac{1}{7} \\ y = \frac{1}{14}t - \frac{5}{14} \\ z = t \end{cases} // t \in \mathbb{R}$ تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ)	
	0.25×2	ج- التحقق $O \notin (\Delta)$	
0.25×2	د- $d(O; (P_2)) = \frac{1}{3}, d(O; (P_1)) = \frac{\sqrt{29}}{29}$		
0.25×2	$d(O; (\Delta)) = \sqrt{\frac{38}{261}}$		

مجموع العلامة	مجزأة	عناصر الإجابة (الموضوع الأول)	محاور
			الموضوع
4	0.25×3+0.5	التمرين الثالث: (04 نقاط)	المتتاليات الحسابية
	0.75	(1) $U_0 = 3$ ، $U_3 = 18$ و $U_3 = 12$ ، $d = 6$	
	0.5	(2) $U_n = 3 + 3n$ و $2010 = 3 + 3 \times 669$ ورتبته 670	
	0.5	(3) $10080 = \frac{5}{2}(u_n + u_{n+1})$ ومنه $u_n = 2010 = u_{669}$	
	0.5×2	(4) أ) $S = 3(n+1)(2n+1)$ ب) $S_2 = 3n(n+1)$ و $S_1 = 3(n+1)^2$	
07	0.25	التمرين الرابع: (07 نقاط)	دراسة دالة أسية البرهان بالتراجع معادلة المماس حساب المساحات
	0.25	أ) (1) $f'(x) = (3x + 7)e^x$	
	0.75	$f''(x) = (3x + 10)e^x$	
	0.25	البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معنوم فإن:	
	0.25	$f^{(n)}(x) = (3x + 3n + 4)e^x$	
	0.25	ب) $(c_1; c_2) \in \mathbb{R}^2$ حيث $y = (3x + 10)e^x + c_1x + c_2$	
	0.25	أ) (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3 \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x + 4 \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$	
	0.25	معادلة المستقيم المقارب لـ (C_f) عند $-\infty$	
	0.25×3	ب) إشارة f' ، f متزايدة تماما على $[-\frac{7}{3}; +\infty[$ ومتناقصة تماما على $]-\infty; -\frac{7}{3}]$	
	0.5	جدول التغيرات	
	0.5	أ) (3) معادلة (Δ) : $y = -(3x + 16)e^{-\frac{10}{3}}$	
	0.25×2	ب) إشارة $f''(x)$ ، $f''(x) = 0$ نقطة انعطاف $(-\frac{10}{3}; f(-\frac{10}{3}))$	
	0.75	ج) رسم (c_f) و (Δ)	
0.75	أ) (4) $\int_{-1}^x te^t dt = (x-1)e^x + \frac{2}{e}$		
0.5	دالة أصلية لـ f : $F(x) = (3x + 1)e^x + c$		
0.5	ب) $A(\lambda) = -\int_{\lambda}^{-\frac{4}{3}} f(x) dx = (3\lambda + 1)e^{\lambda} + 3e^{-\frac{4}{3}}(ua)$		
0.25	$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda) = 3e^{-\frac{4}{3}}(ua)$		

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)	محاور الموضوع								
المجموع	مجزأة										
04	0.75	التمرين الأول: (04 نقاط) $(x, y) = (7k + 1, 13k + 2)$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ (1)	الموافقات نظام التعداد القسمة الاقليدية								
	 $k \in \mathbb{Z}, a = 91k + 13$ (2)									
	 بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 7 (3)									
	0.75	<table border="1"> <tr> <td>n</td> <td>$3k$</td> <td>$3k + 1$</td> <td>$3k + 2$</td> </tr> <tr> <td>باقي القسمة</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>4</td> </tr> </table>		n	$3k$	$3k + 1$	$3k + 2$	باقي القسمة	1	2	4
		n		$3k$	$3k + 1$	$3k + 2$					
	باقي القسمة	1		2	4						
	0.75 بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 13 (3)									
	0.25	<table border="1"> <tr> <td>n</td> <td>$3k$</td> <td>$3k + 1$</td> <td>$3k + 2$</td> </tr> <tr> <td>باقي القسمة</td> <td>1</td> <td>9</td> <td>3</td> </tr> </table>		n	$3k$	$3k + 1$	$3k + 2$	باقي القسمة	1	9	3
		n		$3k$	$3k + 1$	$3k + 2$					
		باقي القسمة		1	9	3					
..... $b = 6 + 8 \times 9 + \beta \times 9^3 + \alpha \times 9^6$ مع $0 < \alpha < 9$ و $0 \leq \beta < 9$ (4)											
..... $b \equiv 0 [7]$ تكافئ $\alpha + \beta \equiv -1 [7]$											
0.25 $b \equiv 0 [13]$ تكافئ $\alpha + \beta \equiv 0 [13]$										
0.25	ومنه $\alpha + \beta = 13$ وعليه : $(\alpha, \beta) \in \{(5, 8), (8, 5), (6, 7), (7, 6)\}$										
05	0.5x2	التمرين الثاني: (05 نقاط) $\lambda \in \mathbb{R} \begin{cases} x = \frac{1}{2}\lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 - 3\lambda \end{cases} : (\Delta), t \in \mathbb{R} \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = \frac{3}{2}t \end{cases} : (D)$ (1)	التمثيل الوسيطي لمستقيم معادلة مستو مركز ثقل مثلث بعد نقطة عن مستقيم								
	 $G \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1\right)$ و (D) متقاطعان في النقطة (2)									
	0.5 $\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \vec{0}$ (2)									
	0.25 مركز ثقل المثلث ABC G									
	0.5 $\vec{n} \left(6; 3; 2\right)$ أو $\vec{n} \left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$ (3)									
	0.5 معادلة للمستوى (ABC) $x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z - 1 = 0$									
	0.5 المسافة بين النقطة O والمستوى (ABC) تساوي $\frac{6}{7}$ (4)									
	0.75 $H \left(\frac{5}{17}; \frac{12}{17}; \frac{18}{17}\right)$ (5)									
	0.5 ب- المسافة بين B و (D) تساوي $BH = \frac{\sqrt{833}}{17} = \frac{7}{\sqrt{17}}$									

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)	محاور الموضوع	
المجموع	مجزأة			
04	0.5	التمرين الثالث: (04 نقاط) 1/ أ خطأ، لأن $a = \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$ ب) صحيح لأن: $a^{2011} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\bar{a} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$ 2/ أ- خطأ لأن زاويته هي $\frac{3\pi}{4}$ ب- خطأ لأنه مجموعة النقط M هي نصف مستقيم مفتوح مبدؤه: A	الأعداد المركبة المتتاليات	
	1	3/ أ) صحيح لأن: $\frac{3}{4} \left[-\frac{7}{12} \left(\frac{3}{4} \right)^n + \frac{2}{3} \right] + \frac{1}{6} = -\frac{7}{12} \left(\frac{3}{4} \right)^{n+1} + \frac{2}{3}$		
	0.5	ب) خطأ لأن: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n > 0$		
	0.5	ج) خطأ لأن: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{2}{3}$		
	0.5	التمرين الرابع: (07 نقاط) 1- أ) $g'(x) = 2x + \frac{2}{x} > 0$ ، g متزايدة تماماً على $]0; +\infty[$		دالة لوغاريتمية دوال أصلية وحساب المساحات الوضع النسبي
	0.25x2	ب- $g(1) = 0$		
	0.25x3	إشارة $g(x)$: $g(x) > 0$ من أجل $x > 1$ و $g(x) < 0$ من أجل $0 < x < 1$		
0.25	2- أ) f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ لأنها جداء دالتين قابلتين للاشتقاق			
0.5	ب) $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$			
0.25	f متزايدة تماماً على $]1; +\infty[$ ومتناقصة تماماً على $]0; 1[$			
0.25x3	ب) $f(x) - \ln x = \frac{-\ln x}{x^2}$ ومنه (C_f) فوق (δ) من أجل $0 < x < 1$ و (C_f) تحت (δ) من أجل $x > 1$			
0.25	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \ln x = 0$			
0.25	نستنتج أن (δ) منحنى مقارب أ- (C_f) في جوار $+\infty$			
0.75	رسم (C_f) و (δ)			
0.5	3- أ) $\int_1^x \frac{1}{t^2} \ln t dt = -\frac{1}{x} (1 + \ln x) + 1$			
0.25	هي دالة أصلية لـ $x \mapsto \ln x$ على $]1; +\infty[$			
0.25	دالة أصلية للدالة f على المجال $]1; +\infty[$ $F(x) = \frac{(x^2 + 1) \ln x - x^2 + 1}{x}$			
0.25	ب- $A(\alpha) = \int_1^\alpha (\ln x - f(x)) dx = 1 - \frac{1 + \ln \alpha}{\alpha} (u\alpha)$			
0.25	$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A(\alpha) = 1 (u\alpha)$			