# الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

## وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

## امتحان بكالوريا التعليم الثانوي دورة 2025

الشعبة: رياضيات

اختبار في مادة: الرياضيات | المدة: 04 سا و30 د

**على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:**

### الموضوع الأوّل

**يحتوي الموضوع على (03) صفحات (من الصفحة 1 من 5 إلى الصفحة 3 من 5)**

**التمرين الأوّل: ( 04 نقاط )**

يحتوي صندوق $U_1$ على 12 كرية منها: 3 كريات حمراء ، 4 كريات بيضاء و 5 كريات خضراء

ويحتوي صندوق $U_2$ على 7 كريات منها: 4 كريات حمراء و 3 كريات بيضاء.

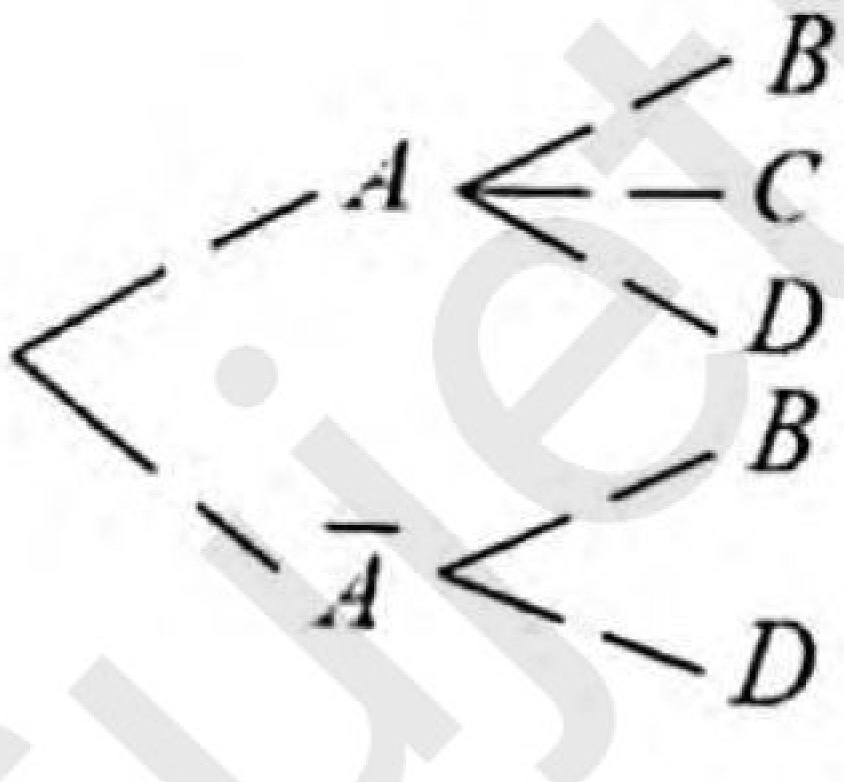
(جميع الكريات متماثلة ولا نفرّق بينها باللّمس).

نرمي نردا غير مزيّف ذا 6 أوجه مرقّمة بـ: 1 ، 1 ، 1 ، 1 ، 2 ، 2

- إذا ظهر الرّقم 1 ، نسحب عشوائيا 3 كريات في آن واحد من $U_1$

- وإذا ظهر الرّقم 2 ، نسحب عشوائيا 3 كريات على التّوالي من $U_2$ دون إرجاع.

نعتبر الحوادث:




$A$ : « ظهور الرّقم 1 »

$B$ : « الحصول على 3 كريات من نفس اللّون »

$C$ : « الحصول على 3 كريات مختلفة الألوان مثنى مثنى »

$D$ : « الحصول على كريتين بالضّبط من نفس اللّون »

1) انقل واملأ شجرة الاحتمالات المقابلة.

2) أ) احسب $P(B)$ ، $P(C)$ ، $P(D)$ ، $P(B\cup C)$ احتمالات الحوادث $B$ ، $C$ ، $D$ ، $B\cup C$ على الترتيب.

ب) بيّن أنّ: $P(A\cap\overline{B})=\dfrac{41}{66}$

جـ) احسب $P_{\overline{B}}(A)$ احتمال سحب 3 كريات من $U_1$ علما أنّها ليست من نفس اللّون.

3) $X$ المتغير العشوائي الذي يرفق بكلّ عملية سحب لـ 3 كريات كما سبق، عدد الألوان التي تحملها الكريات المسحوبة.

- عيّن قانون احتمال المتغير العشوائي $X$ ثمّ احسب أمله الرّياضياتي.

**التمرين الثاني: ( 04 نقاط )**

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ الآتية:

$$(z^2+1)(z^2-6z+13)=0$$

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

$A$ ، $B$ ، $C$ نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب $z_A$ ، $z_B$ ، $z_C$ حيث:

$z_A=2-3i$ ، $z_B=iz_A$ ، $z_C=-i$ و $L$ عدد مركب حيث: $L=\dfrac{z_A-z_C}{z_B-z_C}$

أ) اكتب كلاً من العددين $z_A-z_C$ ، $z_B-z_C$ على الشكل المثلثي.

ب) عيّن الطويلة وعمدة للعدد المركب $L$ ثم حدد طبيعة المثلث $ABC$

جـ) بيّن أنّ النقط $O$ ، $A$ ، $B$ و $C$ تنتمي إلى نفس الدائرة التي يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

د) من أجل كلّ عدد طبيعي $n$ ، نضع: $S_n=|L|+|L|^2+\cdots+|L|^n$

- احسب بدلالة $n$ المجموع $S_n$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$

3) $z_\theta$ عدد مركب حيث: $z_\theta=1+\cos(2\theta)-i\sin(2\theta)$ و $\theta$ عدد حقيقي يختلف عن $\dfrac{\pi}{2}$ مع $0<\theta<\pi$

- بيّن أنّ $z_\theta=2\cos\theta(\cos\theta-i\sin\theta)$ ثم استنتج حسب قيم $\theta$ الطويلة وعمدة للعدد $z_\theta$

**التمرين الثالث: ( 05 نقاط )**

1) نعتبر المعادلة: $(E)\cdots 13x-2y=35$ ذات المجهولين الصحيحين $x$ و $y$

أ) بيّن أنّه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلاً للمعادلة $(E)$ فإنّ $y\equiv 2[13]$ ثم حلّ المعادلة $(E)$

ب) جد كلّ الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة $(E)$ حيث: $PGCD(x;y)=35$

2) أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي $n$ بواقي القسمة الإقليدية للعدد $5^n$ على 11

ب) عيّن قيم العدد الطبيعي $n$ التي من أجلها يكون العدد $6n^2+1446^{x+y}$ قابلا للقسمة على 11

والثنائية $(x;y)$ حلّ للمعادلة $(E)$

3) $\lambda$ عدد طبيعي يكتب $\overline{1\alpha\alpha\beta\beta1}$ في نظام التعداد ذي الأساس 4

ويكتب $\overline{1\alpha\beta13}$ في نظام التعداد ذي الأساس 6

- عيّن $\alpha$ و $\beta$ ثم اكتب $\lambda$ في النظام العشري.

4) $a$ ، $b$ عددان طبيعيان و $d$ قاسمهما المشترك الأكبر.

- حلّل العدد 2025 إلى جداء عوامل أولية ثم عيّن كلّ الثنائيات $(a;b)$ حيث: $7(ab)^2-3d^4=2025$

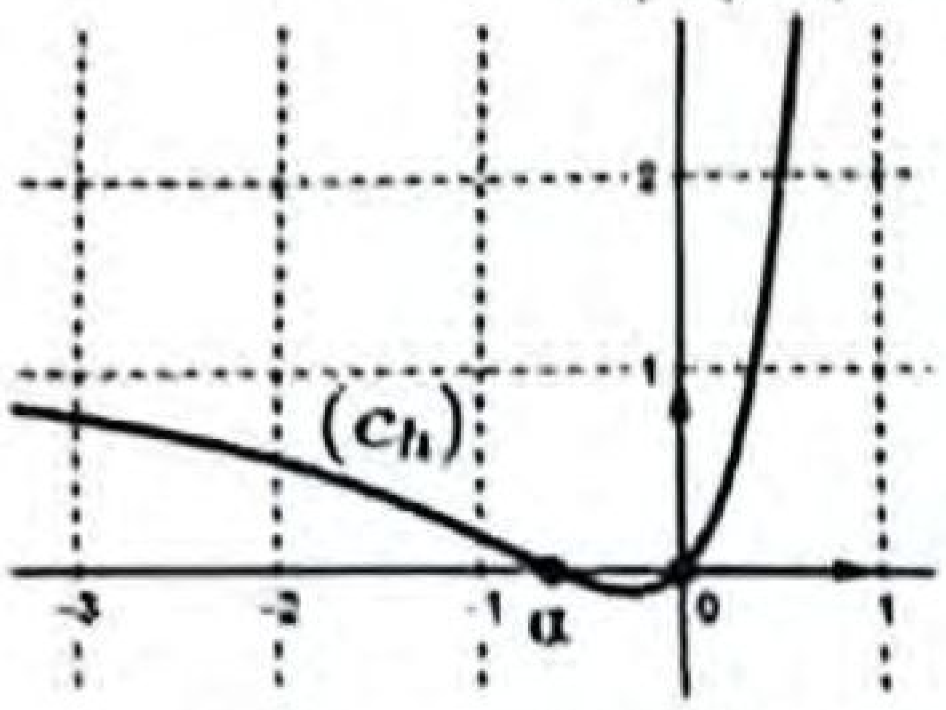
**التمرين الرابع: ( 07 نقاط )**

I) 1) $g$ الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1+xe^{x}$

- ادرس اتجاه تغيّر الدالة $g$ ثمّ استنتج أنّه: من أجل كلّ عدد حقيقي $x$ ، $1+xe^{x}>0$

2) $h$ الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=(x^2+1)e^{2x}+(x-2)e^{x}+1$

تمثيلها البياني $(C_h)$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما $\alpha$ و $0$ ، كما في الشّكل المقابل.




أ) بقراءة بيانيّة، حدّد إشارة $h(x)$ على $\mathbb{R}$

ب) تحقّق أنّ: $-0,7<\alpha<-0,6$

II) $f$ الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2x+\dfrac{2-2e^{x}}{1+xe^{x}}$ ، $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ( وحدة الطول $2\,cm$ ).

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ وبيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ب) بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=2x+2$ مقارب مائل لـ$(C_f)$ عند $-\infty$

وأنّ المستقيم $(\Delta')$ ذا المعادلة $y=2x$ مقارب مائل لـ$(C_f)$ عند $+\infty$

جـ) ادرس وضعية كلّ من $(\Delta)$ و $(\Delta')$ بالنّسبة إلى $(C_f)$

2) أ) بيّن أنّه: من أجل كلّ عدد حقيقي $x$ ، $f'(x)=\dfrac{2h(x)}{(1+xe^{x})^2}$

ب) استنتج اتّجاه تغيّر الدالة $f$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) ارسم كلًّا من $(\Delta)$ ، $(\Delta')$ و $(C_f)$ ( نأخذ: $f(\alpha)\simeq 0,15$ )

4) أ) تحقّق أنّه: من أجل كلّ عدد حقيقي $x$ ، $1-\dfrac{1-e^{x}}{1+xe^{x}}=\dfrac{(x+1)\,e^{x}}{1+xe^{x}}$

ب) استنتج بالسنتيمتر المربّع حساب $\mathcal{A}$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحني $(C_f)$ والمستقيمات التي معادلاتها: $y=2x+2$ ، $x=0$ و $x=1$

5) $k$ الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $k(x)=f(x^2)$

- دون حساب عبارة $k(x)$ ، حدّد اتّجاه تغيّر الدالة $k$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

انتهى الموضوع الأوّل

## الموضوع الثاني

**يحتوي الموضوع على صفحتين (02) (من الصفحة 4 من 5 إلى الصفحة 5 من 5)**

**التمرين الأول: ( 04 نقاط )**

1) $f$ الدالة المعرّفة على $\left[-1;-\frac{1}{2}\right]$ بـ: $f(x)=\dfrac{-x^2+x}{x^2+1}$

- بيّن أنّ الدالة $f$ متزايدة تماما.

2) $(u_n)$ المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0=-\frac{1}{2}$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}=f(u_n)$

أ) برهن بالتراجع أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي $n$ ، $-1<u_n\leq-\frac{1}{2}$

ب) ادرس اتّجاه تغيّر المتتالية $(u_n)$

3) أ) بيّن أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}+1\leq\frac{4}{5}(u_n+1)$

ب) استنتج أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي $n$ ، $0<u_n+1\leq\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n$ ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

4) من أجل كلّ عدد طبيعي $n$ ، نضع: $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$

- بيّن أنّ: $S_n\leq-2\left(\frac{4}{5}\right)^n-n+\frac{3}{2}$ ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$

**التمرين الثاني: ( 04 نقاط )**

1) حلّ في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ الآتية: $(iz-1+2i)(z^2-4z+5)=0$

2) المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ و $A$ ، $B$ ، $C$ نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب $z_A$ ، $z_B$ ، $z_C$ حيث: $z_A=2-i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=-2-i$

و $L$ عدد مركّب حيث: $L=\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$

أ) اكتب العدد $L$ على الشكل المثلثي ثمّ حدّد طبيعة المثلث $ABC$

ب) بيّن أنّ النقط $A$ ، $B$ و $C$ تنتمي إلى نفس الدائرة التي يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

جـ) عيّن $z_D$ ، $z_E$ لاحقتي النقطتين $D$ ، $E$ على الترتيب حتى يكون الرباعي $BCDE$ معيّنا مركزه $A$

3) $z_\theta$ عدد مركّب حيث: $z_\theta=1-\cos(2\theta)+i\sin(2\theta)$ و $\theta$ عدد حقيقي غير معدوم مع $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$

- بيّن أنّ $z_\theta=2\sin\theta(\sin\theta+i\cos\theta)$ ثمّ استنتج حسب قيم $\theta$ الطّويلة وعمدة للعدد $z_\theta$

**التمرين الثالث: ( 05 نقاط )**

1) نعتبر المعادلة: $116x-81y=2\cdots(E)$ ذات المجهولين الصحيحين $x$ و $y$

أ) بيّن أنّ العددين 116 و 81 أوّليان فيما بينهما.

ب) حلّ المعادلة $(E)$ علما أنّ الثنائية $(10;7)$ حلّ لها.

2) أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي $n$ بواقي القسمة الإقليدية للعدد $7^n$ على 9

ب) استنتج حسب قيم العدد الطبيعي $n$ بواقي القسمة الإقليدية للعدد $7^{2n+1}$ على 9

جـ) عيّن الثنائيات الطبيعية $(x\,;\,y)$ حلول المعادلة $(E)$ والتي تحقق: $x^y \equiv 4\,[9]$

3) $\alpha$ ، $\beta$ عددان طبيعيان أوليّان فيما بينهما و $a$ ، $b$ عددان حيث: $a=7\alpha+3\beta$ و $b=5\alpha+2\beta$

أ) بيّن أنّ العددين $a$ ، $b$ أوليّان فيما بينهما.

ب) عيّن العددين $\alpha$ ، $\beta$ حتى يكون: $a=116$ و $b=81$

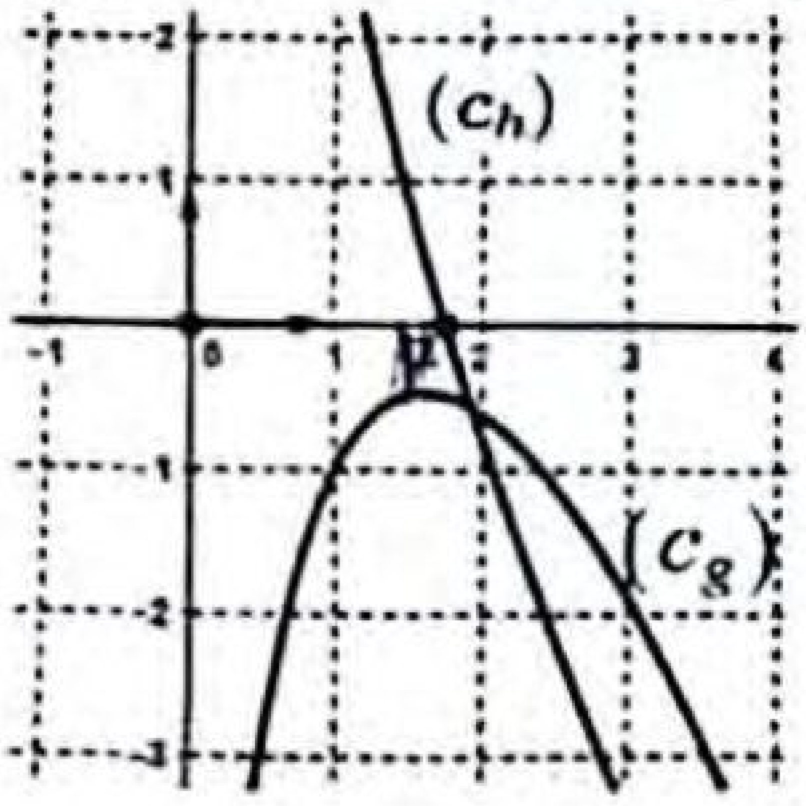
**التمرين الرابع: ( 07 نقاط )**

I) $g$ ، $h$ الدالتان المعرّفتان على $]0\,;+\infty[$ بـ: $g(x)=-x+(4-x)\ln x$ و $h(x)=4-x-4\ln x$

$(c_g)$ ، $(c_h)$ التمثيلان البيانيان للدالتين $g$ ، $h$ على الترتيب.

$(c_h)$ يقطع حامل محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة $\alpha$

كما في الشكل المقابل.




- بقراءة بيانية، حدّد إشارة كلّ من $g(x)$ و $h(x)$

ثمّ تحقّق أن: $1{,}7<\alpha<1{,}8$

II) $f$ الدالة المعرّفة على $]0\,;+\infty[$ بـ: $f(x)=(-x+2\ln x)\ln x$

$(c_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$

1) أ) احسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب) بيّن أنّه: من أجل كلّ $x$ من $]0\,;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$

$-x+(4-x)\ln x$

جـ) استنتج اتّجاه تغيّر الدالة $f$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2) بيّن أنّ للمنحني $(c_f)$ مماسين $(T)$ و $(T')$ معامل توجيه كلّ منهما $-1$ ، يُطلب تعيين معادلة لكلّ منهما.

3) أ) بيّن أنّه: من أجل كلّ $x$ من $]0\,;+\infty[$ ، $f''(x)=\dfrac{h(x)}{x^2}$

ب) استنتج أنّ للمنحني $(c_f)$ نقطة انعطاف، يطلب تعيين فاصلتها.

4) احسب $f(e^2)$ ثمّ ارسم $(T)$ ، $(T')$ و $(c_f)$ (نأخذ: $f(\alpha)\simeq-0{,}35$ ، $4-8\ln2+8(\ln2)^2\simeq2{,}3$)

5) أ) بيّن أنّ الدالة $k: x\mapsto x(\ln x)^2-2x\ln x+2x$ أصلية للدالة $x\mapsto(\ln x)^2$ على $]0\,;+\infty[$

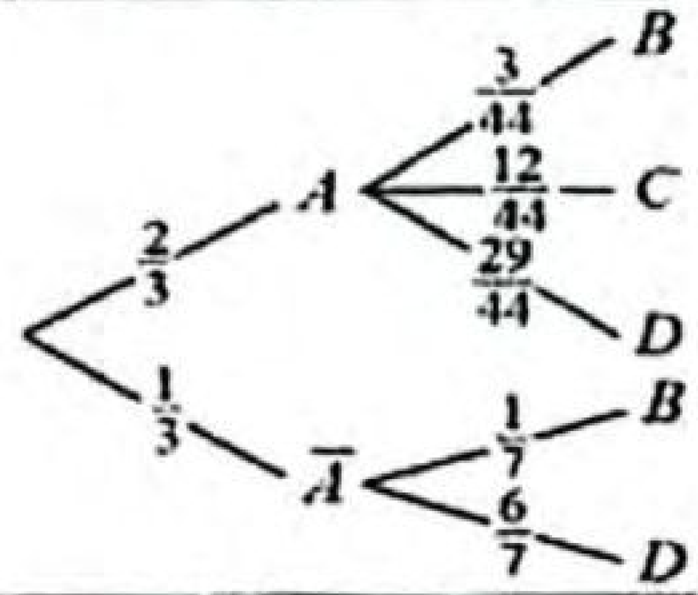
ب) باستعمال المكاملة بالتجزئة، بيّن أنّ: $\displaystyle\int_1^e x\ln x\,dx=\frac{e^2+1}{4}$

جـ) استنتج بوحدة المساحة، حساب $\mathcal{A}$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحني $(c_f)$ والمستقيمات التي معادلاتها: $y=0$ ، $x=1$ و $x=e$

6) $\varphi$ الدالة المعرّفة على $]0\,;+\infty[$ بـ: $\varphi(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

- دون حساب عبارة $\varphi(x)$ ، حدّد اتّجاه تغيّر الدالة $\varphi$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

انتهى الموضوع الثاني

| | عناصر الإجابة ( الموضوع الأول ) | العلامة مجزأة | العلامة |
|---|---|---|---|
| | **التمرين الأول ( 04 نقاط )** | | |
| 1) | شجرة الاحتمالات:  | 0,75 | 0,75 |
| 2) | أ) $P(B)=\frac{43}{462}$ ، $P(C)=\frac{2}{11}$ ، $P(D)=\frac{335}{462}$ ، $P(B\cup C)=\frac{127}{462}$ | 0,25×4 | 2 |
| | ب) $P(A\cap\overline{B})=\frac{2}{3}\times\frac{12}{44}+\frac{2}{3}\times\frac{29}{44}=\frac{41}{66}$ | 0,5 | |
| | جـ) $P_{\overline{B}}(A)=\frac{P(A\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{287}{419}$ | 0,5 | |
| 3) | $x_i\in\{1;2;3\}$ <br> $E(X)=\frac{965}{462}$ <br> $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline x_i & 1 & 2 & 3 \\ \hline P(X=x_i) & \frac{43}{462} & \frac{335}{462} & \frac{84}{462} \\ \hline\end{array}$ | 0.25×5 | 1.25 |
| | **التمرين الثاني ( 04 نقاط )** | | |
| 1) | $S=\{-i\,;\,i\,;3-2i\,;3+2i\}$ | 0,25×4 | 1 |
| 2) | أ) $z_A-z_C=2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ <br> $z_B-z_C=3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ | 0,25×2 | 2,25 |
| | ب) $\lvert L\rvert=\frac{2}{3}$ ، $\arg(L)=-\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$ ، المثلث $ABC$ قائم في $C$ | 0,25×3 | |
| | جـ) النقط $A$ ، $B$ و $C$ تنتمي إلى الدائرة $(C)$ التي مركزها $\omega$ منتصف $[AB]$ <br> لاحقته $\frac{5}{2}-\frac{1}{2}i$ ونصف قطرها $\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{26}}{2}$ <br> بما أن: $\omega O=\frac{\sqrt{26}}{2}$ فإنّ $O$ تنتمي إلى الدائرة $(C)$ | 0,25×2 | |
| | د) $S_n=\lvert L\rvert^1+\dots+\lvert L\rvert^n=\lvert L\rvert^0+\lvert L\rvert^1+\dots+\lvert L\rvert^n-1=2\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$ <br> $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=2$ | 0,25 <br> 0,25 | |
| 3) | لدينا: $\cos(2\theta)=2\cos^2\theta-1$ و $\sin(2\theta)=2\sin\theta.\cos\theta$ <br> ومنه: $z_\theta=2\cos\theta(\cos\theta-i\sin\theta)$ | 0,25 | 0,75 |

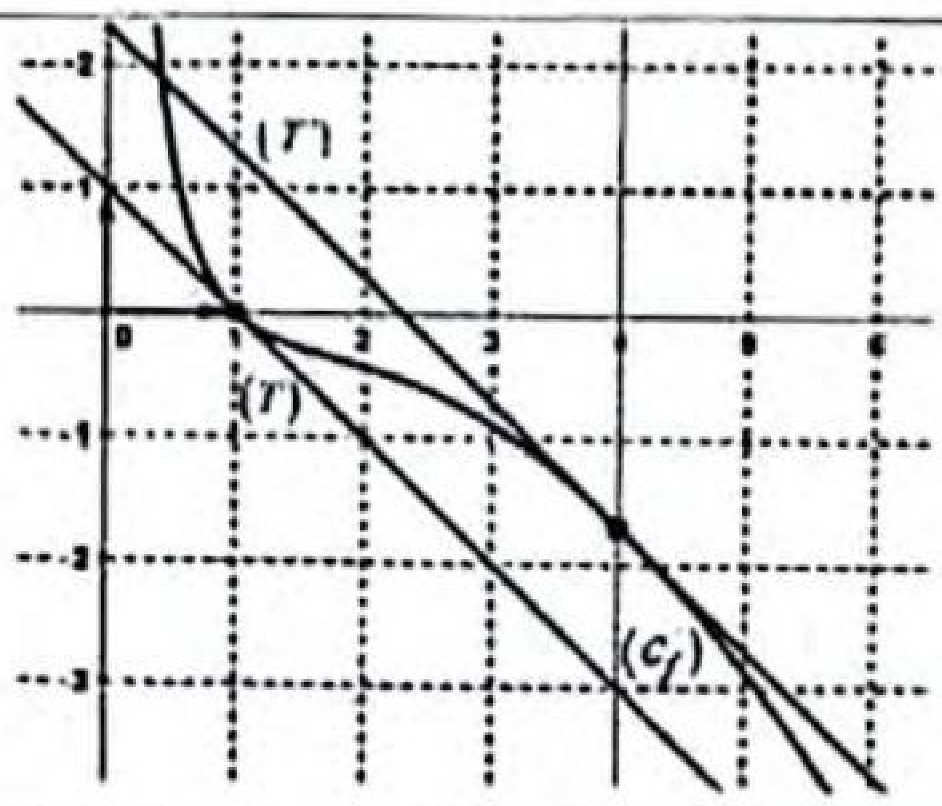
<table>
<tr><th>رقم السؤال</th><th>عناصر الإجابة</th><th>مجزأة</th><th>مجموع</th></tr>
<tr><td></td><td>لما: $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ فإن $|z_0|=2\cos\theta$ و $\arg(z_0)=-\theta+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$</td><td>0,25</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td>لما: $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ فإن $|z_0|=-2\cos\theta$ و $\arg(z_0)=\pi-\theta+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td colspan="4">التمرين الثالث ( 05 نقاط )</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1)</td><td>أ) تبيان أن: $y\equiv 2[13]$ ومنه: $\begin{cases}x=2k+3\\ y=13k+2\end{cases}; k\in\mathbb{Z}$</td><td>0.5+0.25</td><td rowspan="2">1,25</td></tr>
<tr><td>ب) $PGCD(x;y)=35$ يعني 35 يقسم $x$ و 35 يقسم $y$<br>ومنه: $k=35k'-19$ وعليه: $\begin{cases}x=70k'+35\\ y=455k'+210\end{cases}; k'\in\mathbb{Z}$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2)</td><td>أ)<table><tr><td>$n=$</td><td>$5k$</td><td>$5k+1$</td><td>$5k+2$</td><td>$5k+3$</td><td>$5k+4$</td><td>$k\in\mathbb{N}$</td></tr><tr><td>$5^n\equiv$</td><td>1</td><td>5</td><td>3</td><td>4</td><td>9</td><td>$[11]$</td></tr></table></td><td>0,75</td><td rowspan="2">1.5</td></tr>
<tr><td>ب) $1446\equiv5[11]$ ، $1446^{x+y}\equiv5^{5(3k+1)}[11]$ و $k\in\mathbb{N}$<br>$6n^2+1446^{x+y}\equiv0[11]$ يكافئ $6n^2+1\equiv0[11]$ أي: $n^2\equiv9[11]$<br>ومنه: $n=11\gamma+3$ أو $n=11\gamma+8$ مع $\gamma\in\mathbb{N}$</td><td>0,25<br>0,25×2</td></tr>
<tr><td>3)</td><td>لدينا: $\begin{cases}\lambda=20\beta+320\alpha+1025\\ \lambda=216\alpha+36\beta+1305\\ 0\le\alpha<4;0\le\beta<4\end{cases}$ ومنه: $\begin{cases}13\alpha-2\beta=35\\ 0\le\alpha<4;0\le\beta<4\end{cases}$<br>نستنتج أن: $(\alpha;\beta)=(3;2)$ و $\lambda=2025$</td><td>0,5<br>0,25×3</td><td>1,25</td></tr>
<tr><td>4)</td><td>$2025=3^4\times5^2$<br>$7(ab)^2-3d^4=2025$ تكافئ $d^4\left[7(a'b')^2-3\right]=2025$<br>مع $PGCD(a';b')=1$ ومنه: $d\in\{1;3\}$<br>لما $d=1$ : ينتج $7(a'b')^2=2028$ ، ليس للمعادلة حلّ طبيعي.<br>لما $d=3$ : ينتج $a'b'=2$ ومنه: $(a;b)\in\{(3;6),(6;3)\}$</td><td>0,25<br>0,25<br>0,25<br>0,25</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="4">التمرين الرابع ( 07 نقاط )</td></tr>
<tr><td>I)<br>1)</td><td>من أجل كلّ عدد حقيقي $x$ ، $g'(x)=(1+x)e^x$ ، إشارة $g'(x)$<br>الدالة $g$ متناقصة تماما على $]-\infty;-1]$ ومتزايدة تماما على $[-1;+\infty[$<br>$g(-1)=1-e^{-1}$ ونستنتج أنه: من أجل كلّ عدد حقيقي $x$ ، $1+xe^x>0$</td><td>0,25×2<br>0,25<br>0,25</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2)</td><td>أ) إشارة $h(x)$ :<table><tr><td>$x$</td><td>$-\infty$</td><td>$\alpha$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$h(x)$</td><td colspan="4">+ 0 − 0 +</td></tr></table></td><td>0,25</td><td rowspan="2">0,75</td></tr>
<tr><td>ب) لدينا: $h(-0,7)\simeq-0,02$ و $h(-0,6)\simeq0,03$<br>ومنه: $-0,7<\alpha<-0,6$</td><td>0,25×2</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>II) 1)</td><td>أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، تبيان أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$</td><td>$0,25\times 2$</td><td rowspan="3">2</td></tr>
<tr><td></td><td>ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(2x+2)\right)=0$ ، $(\Delta)$ مقارب مائل لـ $(C_f)$ عند $-\infty$<br>$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=0$ ، $(\Delta')$ مقارب مائل لـ $(C_f)$ عند $+\infty$</td><td>0,25<br>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td>جـ) لدينا: من أجل كلّ عدد حقيقي $x$ ، $f(x)-(2x+2)=-\dfrac{2(x+1)\,e^x}{1+xe^x}$<br>لمّا $x=-1$ : $(\Delta)$ يقطع $(C_f)$ في $A(-1;0)$<br>لمّا $x<-1$ : $(C_f)$ أعلى $(\Delta)$ ولمّا $x>-1$ : $(C_f)$ أسفل $(\Delta)$<br>ولدينا: من أجل كلّ عدد حقيقي $x$ ، $f(x)-2x=\dfrac{2-2e^x}{1+xe^x}$<br>لمّا $x=0$ : $(\Delta')$ يقطع $(C_f)$ في $O(0;0)$<br>لمّا $x<0$ : $(C_f)$ أعلى $(\Delta')$ ولمّا $x>0$ : $(C_f)$ أسفل $(\Delta')$</td><td>0,5<br><br><br>0,5</td></tr>
<tr><td>2)</td><td>أ) من أجل كلّ عدد حقيقي $x$ ، $f'(x)=\dfrac{2h(x)}{(1+xe^x)^2}$</td><td>0,5</td><td rowspan="2">1,25</td></tr>
<tr><td></td><td>ب) الدالة $f$ متناقصة تماما على $[\alpha;0]$ ومتزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty;\alpha]$ و $[0;+\infty[$<br>جدول التغيرات:<br><table><tr><td>$x$</td><td>$-\infty$</td><td>$\alpha$</td><td>$0$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>+</td><td>0 −</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$-\infty$ ↗</td><td>$f(\alpha)$ ↘</td><td>$0$ ↗</td><td>$+\infty$</td></tr></table></td><td>0,5<br><br>0,25</td></tr>
<tr><td>3)</td><td>رسم $(\Delta)$ ، $(\Delta')$<br>رسم $(C_f)$<br></td><td>$0,25\times 2$<br>0,5</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4)</td><td>أ) من أجل كلّ عدد حقيقي $x$ ، $1-\dfrac{1-e^x}{1+xe^x}=\dfrac{(x+1)\,e^x}{1+xe^x}$</td><td>0,25</td><td rowspan="2">0,5</td></tr>
<tr><td></td><td>ب) $\mathcal{A}=\displaystyle\int_0^1\frac{2(x+1)\,e^x}{1+xe^x}\,dx=8\ln(e+1)\ cm^2$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>5)</td><td>$k'(x)=2x\,f'(x^2)$<br>الدالة $k$ متناقصة تماما على $]-\infty;0]$ ومتزايدة تماما على $[0;+\infty[$<br>جدول التغيرات:<br><table><tr><td>$x$</td><td>$-\infty$</td><td>$0$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$k'(x)$</td><td>−</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>$k(x)$</td><td>$+\infty$ ↘</td><td>$0$</td><td>↗ $+\infty$</td></tr></table></td><td>0,25<br><br>0,25</td><td>0,5</td></tr>
</table>

ملاحظة: تُقبل جميع طرائق الحل الصحيحة مع التقيّد بسلم التنقيط.

<table>
<tr><th colspan="2">عناصر الإجابة ( الموضوع الثاني )</th><th colspan="2">العلامة</th></tr>
<tr><th></th><th></th><th>مجزأة</th><th>العلامة</th></tr>
<tr><td colspan="4">التمرين الأول ( 04 نقاط )</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1)</td><td>أ) من أجل كل $x$ من $\left[-1;-\frac{1}{2}\right]$ ، $f'(x)=\dfrac{-x^2-2x+1}{\left(x^2+1\right)^2}$</td><td>0,5</td><td rowspan="2">1</td></tr>
<tr><td>إشارة $f'(x)$ ، الدالة $f$ متزايدة تماما على $\left[-1;-\frac{1}{2}\right]$</td><td>0,25×2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2)</td><td>أ) البرهان بالتراجع.</td><td>0,5+0,25</td><td rowspan="2">1,25</td></tr>
<tr><td>ب) من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}-u_n=\dfrac{-u_n^2\left(u_n+1\right)}{u_n^2+1}$<br>$(u_n)$ متناقصة تماما.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3)</td><td>أ) من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}+1=\dfrac{u_n+1}{u_n^2+1}$<br>ولدينا: $\frac{1}{2}<\dfrac{1}{u_n^2+1}\leq\frac{4}{5}$ ومنه: $u_{n+1}+1\leq\frac{4}{5}\left(u_n+1\right)$</td><td>0,5</td><td rowspan="2">1</td></tr>
<tr><td>ب) استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $0<u_n+1\leq\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n$<br>$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-1$</td><td>0,25<br>0,25</td></tr>
<tr><td>4)</td><td>تبيان أن: $S_n\leq-2\left(\frac{4}{5}\right)^n-n+\frac{3}{2}$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=-\infty$</td><td>0,25+0,5</td><td>0,75</td></tr>
<tr><td colspan="4">التمرين الثاني ( 04 نقاط )</td></tr>
<tr><td>1)</td><td>$S=\{-2-i;2-i;2+i\}$</td><td>0,25×3</td><td>0,75</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2)</td><td>أ) $L=2i$ ، $L=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$<br>المثلث $ABC$ قائم في $A$</td><td>0,5+0,25<br>0,5</td><td rowspan="3">2,5</td></tr>
<tr><td>ب) $|z_A|=|z_B|=|z_C|=\sqrt{5}$<br>ومنه: النقط $A$ ، $B$ و $C$ تنتمي إلى الدائرة التي مركزها $O$ ونصف قطرها $\sqrt{5}$</td><td>0,25<br>0,5</td></tr>
<tr><td>جـ) $z_A=\dfrac{z_B+z_D}{2}$ تكافئ: $z_D=2-3i$<br>$z_A=\dfrac{z_C+z_E}{2}$ تكافئ: $z_E=6-i$</td><td>0,25×2</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="4">0,75</td><td>0,25</td><td>لدينا: $\cos(2\theta)=1-2\sin^2\theta$ و $\sin(2\theta)=2\sin\theta.\cos\theta$<br>ومنه: $z_0=2\sin\theta(\sin\theta+i\cos\theta)$</td><td rowspan="4">3)</td></tr>
<tr><td></td><td>$z_0=2\sin\theta\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)$</td></tr>
<tr><td>0,25</td><td>من أجل $-\frac{\pi}{2}<\theta<0$: $|z_0|=-2\sin\theta$ و $\arg(z_0)=\frac{3\pi}{2}-\theta+2\pi k,k\in\mathbb{Z}$</td></tr>
<tr><td>0,25</td><td>من أجل $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ : $|z_0|=2\sin\theta$ و $\arg(z_0)=\frac{\pi}{2}-\theta+2\pi k,k\in\mathbb{Z}$</td></tr>
<tr><td colspan="4">التمرين الثالث( 05 نقاط )</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1,5</td><td>0,25×3</td><td>أ) $116=2^2\times 29$ ، $81=3^4$ ومنه: $PGCD(116;81)=1$</td><td rowspan="2">1)</td></tr>
<tr><td>0,25×3</td><td>ب) $(x;\ y)=(81k+7\ ;116k+10)\ ;k\in\mathbb{Z}$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">2,5</td><td>0,25<br>0,75</td><td>أ) $7^0\equiv 1[9]$ ، $7^1\equiv 7[9]$ ، $7^2\equiv 4[9]$<br>من أجل كلّ عدد طبيعي $k$: $7^{3k}\equiv 1[9]$ ، $7^{3k+1}\equiv 7[9]$ ، $7^{3k+2}\equiv 4[9]$</td><td rowspan="4">2)</td></tr>
<tr><td>0,25×3</td><td>ب) من أجل $n=3k$ ، $7^{2n+1}\equiv 7[9]$<br>من أجل $n=3k+1$ ، $7^{2n+1}\equiv 1[9]$<br>من أجل $n=3k+2$ ، $7^{2n+1}\equiv 4[9]$</td></tr>
<tr><td>0,25</td><td>جـ) $x^y\equiv 4[9]$ تكافئ $k=3k'+2;k'\in\mathbb{N}$</td></tr>
<tr><td>0,25×2</td><td>ومنه: $(x;\ y)=(243k+169\ ;348k+242)\ ;k\in\mathbb{N}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>0,25×2</td><td>أ) إذا كان $d$ قاسما للعددين $a$ ، $b$ فإنّ $d$ يقسم $5a-7b$ و $3b-2a$<br>وبالتالي $d$ يقسم العددين $\alpha$ ، $\beta$ ومنه: $a$ ، $b$ أوليّان فيما بينهما.</td><td rowspan="2">3)</td></tr>
<tr><td>0,25×2</td><td>ب) $\alpha=3b-2a=11$ ، $\beta=5a-7b=13$</td></tr>
<tr><td colspan="4">التمرين الرابع ( 07 نقاط )</td></tr>
<tr><td>1,25</td><td>0,25<br>0,5<br>0,25×2</td><td>$g$ سالبة تماما على $]0\ ;+\infty[$<br>$h(\alpha)=0$ ، $h$ موجبة تماما على $]0\ ;\alpha[$ وسالبة تماما على $]\alpha\ ;+\infty[$<br>$h(1,8)\simeq -0,15$ و $h(1,7)\simeq 0,18$ ومنه: $1,7<\alpha<1,8$</td><td>I)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">1,5</td><td>0,25×2</td><td>أ) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$</td><td>II)</td></tr>
<tr><td>0,5</td><td>ب) من أجل كلّ $x$ من $]0\ ;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$</td><td rowspan="2">1)</td></tr>
<tr><td>0,25<br>0,25</td><td>جـ) الدالة $f$ متناقصة تماما على $]0\ ;+\infty[$<br>جدول التغيرات:<br><table><tr><td>$x$</td><td>$0$ $\qquad$ $+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>$-$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$+\infty$ ↘ $-\infty$</td></tr></table></td></tr>
</table>

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,5<br>0,25×2 | $f'(x)=-1$ تكافئ $x=1$ أو $x=4$<br>$(T'): y=-x+4-8\ln 2+8(\ln 2)^2$ ، $(T): y=-x+1$ | 2) |
| 0,5 | 0,25 | أ) من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ ، $f''(x)=\dfrac{h(x)}{x^2}$ | 3) |
| | 0,25 | ب) $f''$ تنعدم وتغير إشارتها عند $\alpha$ و $B(\alpha\,;\,f(\alpha))$ نقطة انعطاف | |
| 1,25 | 0,25<br>0,25×2<br>0,5 | $f(e^2)=8-2e^2$<br>رسم $(T')$ ، $(T)$<br>رسم $(C_f)$<br> | 4) |
| 1 | 0,25 | أ) من أجل كلّ $x$ من $]0;+\infty[$ ، $k'(x)=(\ln x)^2$ | 5) |
| | 0,5 | ب) $\displaystyle\int_1^e x\ln x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}\right]_1^e=\frac{e^2+1}{4}$ | |
| | 0,25 | جـ) $\mathcal{A}=\displaystyle\int_1^e -f(x)\,dx=\frac{e^2+1}{4}-2\big(k(e)-k(1)\big)=\frac{e^2-8e+17}{4}\,u.a$ | |
| 0,5 | 0,25<br>0,25 | من أجل كلّ $x$ من $]0;+\infty[$ ، $\varphi'(x)=-\dfrac{1}{x^2}\,f'\!\left(\dfrac{1}{x}\right)$<br>الدالة $\varphi$ متزايدة تماما على $]0;+\infty[$<br>جدول التغيرات:<br>$\begin{array}{c\|ccc} x & 0 & & +\infty \\ \hline \varphi'(x) & & + & \\ \hline \varphi(x) & -\infty & \nearrow & +\infty \end{array}$ | 6) |

**ملاحظة: تُقبل جميع طرائق الحل الصحيحة مع التقيد بسلم التنقيط.**