الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية
امتحان بكالوريا التعليم الثانوي
الشعبة : العلوم التجريبية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات
* دورة جوان 2008 *
المدة :03 ساعات و 30 د

اختبار في مادة الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول (04,5 نقط)

1 – حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$z^2-(1+2i)z-1+i=0$$

نرمز للحلين بـ z_1 و z_2 حيث : $|z_1|<|z_2|$

بين أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي .

2 – المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.لتكن A ، B و C نقط المستوي التي لاحقاتها على الترتيب 1، z_1 ، z_2 .

ليكن Z العدد المركب حيث : $Z=\frac{z_2-1}{z_1-1}$

أ) انطلاقا من التعريف $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ و من الخاصية : $e^{i(\theta_1+\theta_2)}=e^{i\theta_1}\times e^{i\theta_2}$

برهن أن : $e^{-i\theta}=\frac{1}{e^{i\theta}}$ و أن $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i(\theta_1-\theta_2)}$ حيث θ ، θ_1 و θ_2 أعداد حقيقية .

ب) أكتب Z على الشكل الأسي .

جـ) أكتب Z على الشكل المثلثي و استنتج أن النقطة C هي صورة النقطة Bبتشابه مباشر مركزه A ، يطلب تعيين زاويته و نسبته.

التمرين الثاني (04 نقط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر المستوى (P) الذي معادلته :

$$x+2y-z+7=0$$

و النقط $A(2,0,1)$ و $B(3,2,0)$ و $C(-1,-2,2)$.

1 – تحقق أن النقط A ، B و C ليست على استقامية ، ثم بين أن المعادلة الديكارتية للمستوى (ABC) هي : $y+2z-2=0$

2 – أ – تحقق أن المستويين (P) و (ABC) متعامدان ، ثم عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ)مستقيم تقاطع (P)و (ABC) .

ب – احسب المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ) .

3 – لتكن G مرجح الجملة $\{(A,1),(B,\alpha),(C,\beta)\}$ حيث α,β عددان حقيقيان يحققان $1+\alpha+\beta\neq 0$ عين α حتى تنتمي النقطة G إلى المستقيم (Δ).

SujetBacDz.com

التمرين الثالث (04 نقط)

1) نعتبر الدالة f المعرّفة على المجال $I=[1,2]$ بالعبارة: $f(x)=\frac{x+2}{-x+4}$.

أ- بين أن الدالة f متزايدة تماما على I .

ب – بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ ينتمي إلى I.

2) (u_n) هي المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يأتي:

$$u_0=\frac{3}{2} \quad \text{و} \quad u_{n+1}=f(u_n)$$

أ - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n ينتمي إلى I.

ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة.

3) أ) برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$

ب) عين النهاية : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

التمرين الرابع (07,5 نقط)

I – نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-2,+\infty[$ كما يأتي :

$$f(x)=(ax+b)\,e^{-x}+1$$

حيث a و b عددان حقيقيان.

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ وحدة الطول $1cm$.

عين قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1,1)$ تنتمي إلى (C_f) و معامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$.

II – نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-2,+\infty[$ كما يلي :

$$g(x)=(-x-1)\,e^{-x}+1$$

و (C_g) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

أ) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$ و فسر هذه النتيجة بيانيا.(نذكر أن $\lim\limits_{u\to-\infty} ue^u=0$)

ب) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم أنشئ جدول تغيراتها.

ج) بيّن أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيين احداثييها.

د) اكتب معادلة المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة I.

هـ) ارسم (C_g).

و) H الدالة العددية المعرفة على $]-2,+\infty[$ كما يأتي: $H(x)=(\alpha x+\beta)e^{-x}$ حيث α و β عددان حقيقيان.

عيّن α و β بحيث تكون H دالة أصلية للدالة : $x\mapsto g(x)-1$

استنتج الدالة الأصلية للدالة g و التي تنعدم عند القيمة 0.

III) لتكن k الدالة المعرفة على المجال $]-2,+\infty[$ كما يأتي:

$$k(x)=g\left(x^2\right)$$

باستعمال مشتقة دالة مركبة ، عين اتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيراتها .

SujetBacDz.com

الموضوع الثاني

التمرين الأول (03 نقط)

لكل سؤال من الأسئلة التالية جواب واحد صحيح فقط . عيّن الجواب الصحيح معللا اختيارك.

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقط:

$A(1,3,-1)$ ، $B(4,1,0)$ ، $C(-2,0,-2)$ ، $D(3,2,1)$.

و المستوى (P) الذي معادلته: $x-3z-4=0$.

1) المستوى (P) هو: ج1) (BCD) ، ج2) (ABC) ، ج3) (ABD).

2) شعاع ناظمي للمستوي (P) هو :

ج1) $\vec{n_1}(1,2,1)$ ، ج2) $\vec{n_2}(-2,0,6)$ ، ج3) $\vec{n_3}(2,0,-1)$

3) المسافة بين النقطة D و المستوى (P) هي :

ج1) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ، ج2) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ، ج3) $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

التمرين الثاني (05 نقط)

(u_n)متتالية عددية معرفة كما يلي :

$u_0=\frac{5}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+2$

1) أ – ارسم في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ و المنحنى (d) الممثل للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\frac{2}{3}x+2$

ب – باستعمال الرسم السابق، مثل على حامل محور الفواصل و بدون حساب الحدود : u_3,u_2,u_1,u_0 و u_4

جـ – ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

2) أ– برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\leq 6$.

ب – تحقق أن (u_n) متزايدة .

جـ – هل (u_n) متقاربة ؟ برّر إجابتك .

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_n-6$.

أ – اثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب – أكتب عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

SujetBacDz.com

التمرين الثالث (05 نقط)

1 . حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$z^2 + iz - 2 - 6i = 0$$

2. نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقطتين ، A و B اللتين لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب حيث :

$$z_A = 2+i \quad \text{و} \quad z_B = -2-2i$$

عين z_ω لاحقة النقطة ω مركز الدائرة (Γ) ذات القطر $[AB]$.

3.لتكن C النقطة ذات اللاحقة z_c حيث $z_c = \dfrac{4-i}{1+i}$.

اكتب z_c على الشكل الجبري ثم أثبت أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ).

4.أ – برهن أن عبارة التشابه المباشر S الذي مركزه $M_0(z_0)$ و نسبته k $(k>0)$و زاويته θ و الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ هي : $z' - z_0 = ke^{i\theta}(z-z_0)$

ب – تطبيق : عين الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل S المعرف بـــ : $z' + \dfrac{1}{2}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z+\dfrac{1}{2}i\right)$.

التمرين الرابع (07 نقط)

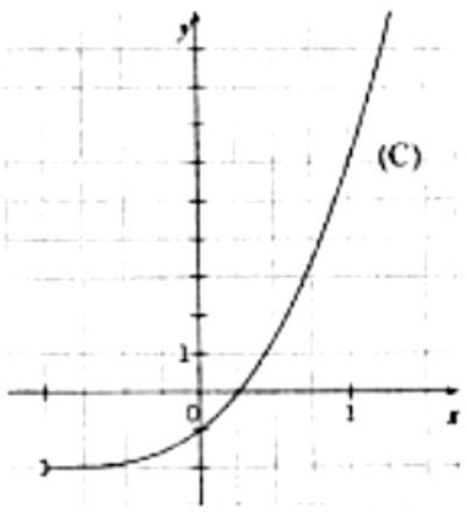
المنحنى (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية g المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يأتي :

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$$

1- أ) – بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة g و حدد $g(0)$ وإشارة $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

ب) علل وجود عدد حقيقي α من المجال $\left]0,\dfrac{1}{2}\right[$ يحقق : $g(\alpha)=0$

ج) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$.



2 - f هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بما يأتي :

$$f(x) = \frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$$

و ليكن (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ) تحقق أنه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+1)^3}$

حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f .

ب) عيّن دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ و فسّر النتيجة بيانيا.

ج) احسب : $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]$ و فسّر النتيجتين بيانيا.

د) شكّل جدول تغيرات الدالة f .

3 – نأخذ $\alpha = 0,26$

أ) عين مدور $f(\alpha)$ إلى 10^{-2} .

ب) ارسم المنحنى (Γ)

4- أ) أكتب $f(x)$ على الشكل : $f(x) = x + a + \dfrac{b}{(x+1)^2}$ ، حيث a و b عددان حقيقيان.

ب) عين F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ والتي تحقق : $F(1)=2$

انتهى **الصفحة 4/4** **بالتوفيق**

SujetBacDz.com

الإجابة النموذجية و سلم التنقيط المادة : الرياضيات الشعبة : العلوم التجريبية بكالوريا جوان 2008

محاور الموضوع	الموضوع الأول	عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة المجموع
الأعداد المركبة	**التمرين 1: (04,5 نقاط)** $\Delta = 1 - 1$ $z_1 = i$ و $z_2 = 1 + i$ تبيان أنّ $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي		**0,5** **0,5×2** **0,5**	**04,5**
	2- أ – البرهان على أن $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$		**0.25**	
	البرهان على أن $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}$		**0,25**	
	ب - $Z = \frac{i}{-1+i}$ **و منه** $Z = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}$		**0,25×2**	
	و بالتالي $Z = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$		**0,25**	
	جـ) الشكل المثلثي لـ Z . $Z = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$		**0,25**	
	$\arg(Z) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ و $\lvert Z\rvert = \frac{AC}{AB}$		**0,25×2**	
	C **هي صورة** B **بالتشابه المباشر الذي مركزه** A **و نسبته** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **و زاويته** $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$		**0,5**	
الهندسة الفضائية	**التمرين 2 : (04 نقاط)**			
	1 – التحقق أن النقط A ، B و C ليست في استقامية		**0,5**	
	معادلة المستوى (ABC) : $y + 2z - 2 = 0$		**0,25×3**	
	طريقة: علما أن النقط A ، B و C ليست في استقامية يكفي إثبات أن إحداثياتها تحقق المعادلة. **أو أي طريقة أخرى صحيحة.**			
	2 – أ – التحقق أن $(P) \perp (ABC)$		**0,5**	
	تمثيل وسيطي لـ (Δ) : $\begin{cases} x = 5t - 11 \\ y = -2t + 2 \\ z = t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$		**0,75**	
	ب – المسافة بين A **و** (Δ) **هي المسافة بين** A **و** (P)		**0,25**	
	المسافة بين A و (P) هي $\frac{4\sqrt{6}}{3}$		**0,25**	

SujetBacDz.com

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة المجموع
	3 – تحليليا / إيجاد احداثيات G	0,5	
	وضع $G \in (\Delta)$ و ايجاد : $\alpha = -\frac{4}{7}$	0,5	
	تقبل أي طريقة صحيحة		
المتتاليات	**التمرين 3 : (04 نقاط)**		04
	1- أ) $f'(x) = \frac{6}{(-x+4)^2}$ ، $f'(x) > 0$ ، إذن f متزايدة على I	0,25×3	
	ب) $1 \le x \le 2$ و f متزايدة على I ⟹ اذن $f(1) \le f(x) \le f(2)$ أي أن $1 \le f(x) \le 2$	0,5	
	2 – أ) $u_0 \in I$	0,25	
	اعتمادا على 1-ب نبرهن أنه إذا كان $u_n \in I$ فإن $u_{n+1} \in I$	0,25×2	
	ب) $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = \frac{u_n^2 - 3u_n + 2}{-u_n + 4}$	0,5	
	$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)(u_n - 2)}{-u_n + 4}$	0,25	
	بما أن u_n ينتمي إلى I فإن : $u_{n+1} - u_n < 0$	0,25	
	نستنتج أن (u_n) متقاربة لأنها متناقصة و محدودة من الأسفل .	0,25	
	3 – أ) التحقق من صحة الخاصية من أجل $n = 0$	0,25	
	البرهان على توريث الخاصية من المرتبة k إلى المرتبة $k+1$.	0,25	
	ب) $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$	0,25	
	التمرين 4: (07,5 نقاط)		07,5
	I- $f(-1) = 1$ و $f'(-1) = -e$	0,25×2	
	$a = b = -1$	0,25×2	
	II-أ) $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 1$	0,25	
	المستقيم $y = 1$ هو مقارب للمنحنى (C_g) عند $(+\infty)$	0,25	
	ب) دراسة تغيرات g ــ تشكيل جدول التغيّرات	0,25×2	
	$g'(x) = xe^{-x}$ ، إشارة $g'(x)$	0,5	
	جدول التغيرات		
	ج) $g''(x) = (1-x)e^{-x}$	0,5	

x	-2		1		$+\infty$
$g''(x)$		$+$	0	$-$	

	$I\left(1,1-\frac{2}{e}\right)$ ؛ $g(1) = 1 - \frac{2}{e}$	0,25×2
	د) معادلة المماس في I : $y = -\frac{1}{e}x + 1 - \frac{3}{e}$	0,25
	هـ) الرسم	0,5

9

SujetBacDz.com

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة المجموع
	و) تعيين α و β ، $\alpha=1$ ، $\beta=2$	0,25×2	
	استنتاج للدالة الأصلية للدالة g : $G(x)=(x+2)e^{-x}+x+c$ و $G(0)=0$	0,25	
	$C=-2$	0,25	
	$k'(x)=2xg'(x^2)$ -III	0,5	

x	-2	0	$+\infty$
$g'(x^2)$	+	+	
$2x$	-	0	+
$k'(x)$	-	0	+

0,25×2

$k(-2)=1-5e^{-4}$

$k(0)=0$

$\lim_{x\to+\infty} k(x)=1$

0,25×3

جدول التغيرات:

x	-2	0	$+\infty$
$k'(x)$	-	0	+
$k(x)$	$h(-2)$ ↘	0	↗ 1

0,25

SujetBacDz.com

الإجابة النموذجية و سلم التنقيط المادة : الرياضيات الشعبة : العلوم التجريبية بكالوريا جوان 2008

محاور الموضوع	الموضوع الثاني عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة المجموع
الهندسة الفضائية	التمرين الأول :(03 نقاط) 1) الإجابة الصحيحة: المستوى (P) هو (ABC)	0,5	03
	التبرير	0,25×3	
	2) الإجابة الصحيحة	0,5	
	التبرير	0,25×2	
	3) الإجابة الصحيحة	0,5	
	التبرير	0,25	
المتتاليات العددية	التمرين الثاني : (05 نقاط) 1 – أ – رسم (d) و (Δ)	0,25×2	05
	ب– تمثيل الحدود : u_0, u_1, u_2, u_3 و u_4	0,5	
	جـ– وضع التخمين (u_n) متتالية متزايدة و متقاربة نحو 6.	0,25×2	
	2 – أ– البرهان بالتراجع : $u_0 = \frac{5}{2}$ و منه $u_0 \leq 6$	0,25	
	نفرض $u_n \leq 6$ و نثبت أن $u_{n+1} \leq 6$	0,5	
	ب– (u_n) متزايدة: كتابة $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{3}u_n + 2$	0,25	
	$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(6 - u_n) \geq 0$	0,25	
	جـ – (u_n) متتالية متقاربة لكونها متزايدة و محدودة من الأعلى .	0,25×2	
	3- أ) $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$ ومنه (v_n) متتالية هندسية	0,5	
	أساسها $q = \frac{2}{3}$	0,25	
	و $v_0 = -\frac{7}{2}$	0,25	
	ب) $v_n = -\frac{7}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$	0,25	
	$v_n = -\frac{7}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n + 6$	0,25	
	(لأنّ $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$) $\lim_{n\to+\infty} u_n = 6$	0,25	
الأعداد المركبة	التمرين الثالث : (05 نقاط) 1) $\Delta = 7 + 24i$	0,5	05
	حساب δ بحيث $\Delta = \delta^2$	0,25×2	
	الحلان هما : $z_1 = 2 + i$ ، $z_2 = -2 - 2i$	0,25×2	

SujetBacDz.com

www.bacdz.org
موقع بكالوريا الجزائر

محاور الموضوع	عناصر الاجابة	العلامة مجزأة	العلامة المجموع
التشابه المباشر	2) $z_\omega = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{-i}{2}$	0,5	05
	3) $z_C = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i$	0,5	
	$\omega C = \lvert z_C - z_\omega \rvert = \frac{5}{2} = \frac{1}{2}\lvert AB \rvert$: لأن $C \in (\Gamma)$	0,5	
	4) أ) ترجمة المعطيات	0,25×2	
	إثبات العبارة : $z' - z_0 = ke^{i\theta}(z - z_0)$	0,5	
	ب) s هو التشابه المباشر الذي مركزه $\omega\left(\frac{1}{2}i\right)$ ، نسبته $k = 2$	0,25×4	
	و زاويته $\theta = \frac{\pi}{3}$		
دراسة تغيرات دالة عددية لمتغير حقيقي	التمرين الرابع : (07 نقاط)		07
	1 -أ) جدول التغيّرات	0,25	

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g(x)$	-2	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$

$g(0) = -1$ ، $g(\frac{1}{2})$ موجب	0,25×2
ب) g مستمرة على $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ و $g(0) \times g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$	0,25
إذن يوجد α من $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ يحقق $g(\alpha) = 0$	0,25

جـ)

x	-1	α	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	

	0,5
2) أ) حساب $f'(x)$	0,25
كتابة $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$	0,25
ب) $f'(\alpha) = \lim_{x \to \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ ؛ $f'(\alpha) = \frac{g(\alpha)}{(x+1)^2}$	0,25×2
$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = 0$	0,25
(Γ) يقبل عند النقطة $(\alpha, f(\alpha))$ مماسا يوازي حامل محور الفواصل.	0,25
جـ) $\lim_{x \to -1} f(x) = +\infty$ ؛ (Γ) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x = -1$	0,25×2

SujetBacDz.com

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة المجموع
	$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=0$ ، (Γ) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y=x+1$	0,25×2	
	د) تشكيل جدول التغيرات		
	$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ؛ إشارة $f(x)$ هي لإشارة $g(x)$	0,25×2	

x	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

0,5

0,25

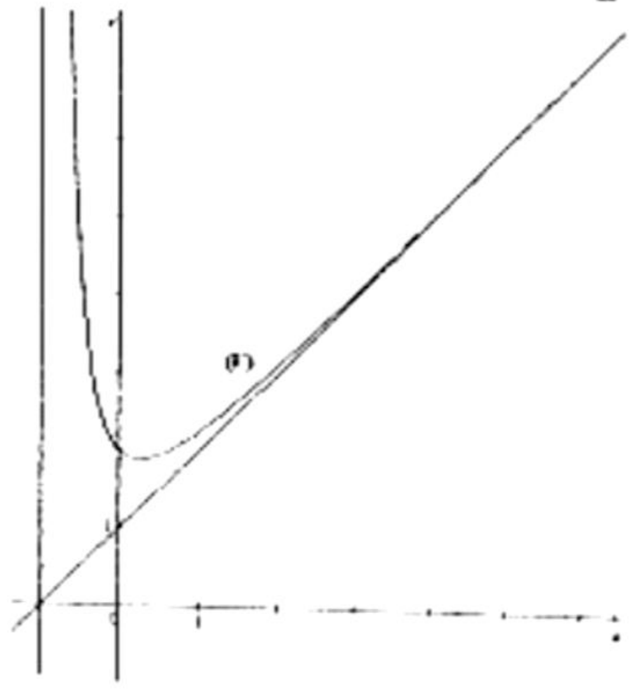
3) أ) $f(0,26)=1,89$

0,5 ب) رسم (Γ)

0,25×2 4 ــ أ) كتابة العبارة $(a=b=1)\ f(x)=x+1+\dfrac{1}{(x+1)^2}$

0,25 ب) $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+x-\dfrac{1}{x+1}+c$

0,25 $F(1)=2$ معناه $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+x-\dfrac{1}{x+1}+1$



13

SujetBacDz.com