الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: 2018

الشعبة: علوم تجريبية

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 03 سا و 30 د

## على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

## الموضوع الأول

### التمرين الأول: (04 نقاط)

$(u_n)$ متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0$ حيث $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1}=1-\dfrac{9}{u_n+5}$

1) أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$: $u_n>-2$

ب) بيّن أنّ $(u_n)$ متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ واستنتج أنّها متقاربة.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $v_n=\dfrac{1}{u_n+2}$

ـ أثبت أنّ المتتالية $(v_n)$ حسابية أساسها $\dfrac{1}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول .

3) عبّر بدلالة $n$ عن $v_n$ و $u_n$ ، و احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

4) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$: $u_0v_0+u_1v_1+....+u_nv_n=\dfrac{1}{3}\left(1-n^2\right)$

### التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحوي صندوق 10 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس، منها أربع كريات بيضاء مرقمة بـ: 1 ، 2 ، 2 ، 3 وثلاث كريات حمراء مرقمة بـ: 2 ، 2 ، 3 وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ : 2 ، 3 ، 3

نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات من هذا الصندوق.

نعتبر الحادثتين $A$ : "الكريات الثلاث المسحوبة تحمل ألوان العلم الوطني"

و $B$ : "الكريات الثلاث المسحوبة لها نفس الرقم".

1) أ) احسب: $P(A)$ و $P(B)$ احتمالي الحادثتين $A$ و $B$ على الترتيب.

ب) بيّن أنّ: $P(A\cap B)=\dfrac{1}{20}$ ثم استنتج $P_A(B)$ و $P(A\cup B)$ .

2) ليكن $X$ المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات التي تحمل رقما فرديا.

عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي $X$ واحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

### التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) حلّ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ التالية : $z^2-\sqrt{3}\,z+1=0$

**2)** المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$

A، B و C ثلاث نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب: $z_A$، $z_B$ و $z_C$ حيث :

$Z_A=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $Z_B=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$ و $z_C=\overline{z}_B$ (يُرمز بـ $\overline{z}_B$ لمرافق $z_B$ )

اكتب $z_A$ و $z_B$ على الشكل الأسي ثم عيّن قيم العدد الطبيعي $n$ بحيث يكون: $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

**3)** **أ)** تحقّق أنّ: $\frac{z_B}{z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ وحدّد طبيعة المثلث $OBC$ .

**ب)** استنتج أنّ: $B$ هي صورة $C$ بدوران $r$ يطلب تعيين عناصره المميزة.

**4)** نسمي $(\gamma)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي ذات اللاحقة $z$ التي تحقق: $|z|=\left|\overline{z}-\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right|$

عيّن طبيعة المجموعة $(\gamma)$ ثم عيّن صورتها بالدوران $r$.

## التمرين الرابع: (07 نقاط)

**I.** $g$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=2+(x-1)e^{-x}$ .

**أ)** احسب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ .

**ب)** ادرس اتجاه تغير الدالة $g$ ثم شكّل جدول تغيراتها.

**ج)** بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $-0.38<\alpha<-0.37$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ .

**II.** لتكن $f$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=2x+1-xe^{-x}$ وليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

**1)** **أ)** احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ .

**ب)** احسب $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x+1)\right)$ ، ثم فسّر النتيجة بيانيا.

**ج)** ادرس الوضع النسبي للمنحني $(C_f)$ والمستقيم $(\Delta)$ حيث: $(\Delta): y=2x+1$

**2)** بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ يكون $f'(x)=g(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ وشكّل جدول تغيراتها.

**3)** اكتب معادلة المماس $(T)$ للمنحنى $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

**4)** ارسم $(\Delta)$، $(T)$ والمنحنى $(C_f)$ (نأخذ $f(\alpha)=0.8$ ) .

**5)** ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول $x$ : $x=(1-m)e^x$ .

**6)** **أ)** باستعمال المكاملة بالتجزئة عيّن الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto xe^{-x}$ على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم من أجل $x=1$ .

**ب)** احسب العدد $A$ مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى $(C_f)$ والمستقيمات التي معادلاتها $x=1$، $x=3$ و $y=2x+1$ .

**انتهى الموضوع الأول**

## الموضوع الثاني

### التمرين الأول: (04 نقاط)

$(u_n)$ متتالية عددية معرفة كما يلي: $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$: $u_{n+1} = u_n + \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$

**1)** احسب كلا من $u_1$ ، $u_2$ و $u_3$.

**2)** بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$: $\frac{2n+3}{2n+1} > 1$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ .

**3)** $(v_n)$ متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ بـ : $v_n = 2n+1$.

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $e^{u_n} = v_n$.

ب) استنتج عبارة الحد العام للمتتالية $(u_n)$ بدلالة $n$ ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ .

**4)** احسب المجموعين $S_n$ و $T$ حيث:

$$S_n = \ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right) + \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) + \ldots + \ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right) \text{ و } T = e^{u_{1439}} + e^{u_{1440}} + \ldots + e^{u_{2018}}$$

### التمرين الثاني: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، نعتبر النقطة $A(1;-2;1)$ والمستويين $(P_1)$ و $(P_2)$ اللذين معادلتيهما على الترتيب $-x+y+2z+1=0$ و $-3x+y+z+4=0$.

**1)** اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ الذي يشمل النقطة $A$ و $\vec{u}(1;5;-2)$ شعاع توجيه له.

**2)** بيّن أنّ المستويين $(P_1)$ و $(P_2)$ متقاطعان ثم تحقق أن تقاطعهما هو المستقيم $(\Delta)$.

**3)** اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(Q)$ الذي يشمل $B(-1;4;0)$ ويعامد كلا من $(P_1)$ و $(P_2)$ ثم استنتج تقاطع المستويات الثلاثة $(P_1)$، $(P_2)$ و $(Q)$.

**4)** لتكن $E(2;3;-1)$ و $H(0;3;-2)$ نقطتان من الفضاء.

أ) تحقّق أنّ $H$ هي المسقط العمودي للنقطة $B$ على المستوي $(P_1)$.

ب) حدّد طبيعة المثلث $EBH$ ثم احسب $V$ حجم رباعي الوجوه $AEBH$ .

### التمرين الثالث: (05 نقاط)

**I)** حلّ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $\left(\overline{z}-4+i\right)\left(z^2-4z+5\right)=0$ (يرمز $\overline{z}$ لمرافق العدد $z$)

**II)** في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقط $A$، $B$ و $C$ التي لاحقاتها على الترتيب $z_A = 2+i$ ، $z_B = 4+i$ و $z_C = \overline{z}_A$.

**1)** تحقق أنّ $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i$ ثم عيّن قيم العدد الطبيعي $n$ بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right)^n$ تخيليا صرفا.

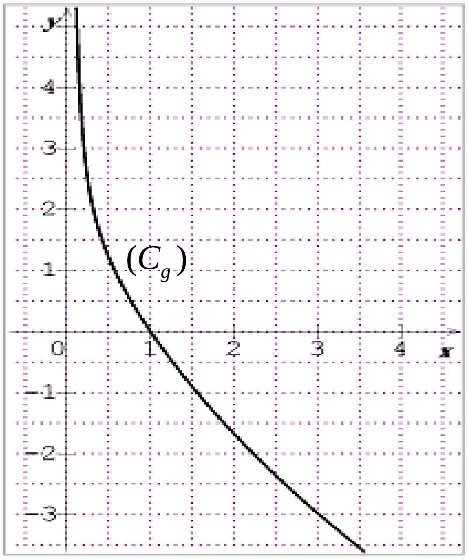
**2)** $D$ نقطة من المستوي لاحقتها $z_D$ حيث: $\begin{cases} |z_D - z_A| = |z_B - z_A| \\ \text{Arg}\left(\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

بيّن أن المثلث $ABD$ متقايس الأضلاع و احسب $z_D$.

**3)** احسب $z_G$ لاحقة النقطة $G$ مركز ثقل المثلث $ABD$ ثم عيّن نسبة وزاوية التشابه المباشر الذي مركزه $A$ ويحول $G$ إلى $D$.

**4)** عيّن $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ ( $M$ تختلف عن $C$ ) بحيث: $\text{Arg}\left(\dfrac{z_G - z}{z_C - z}\right) = \pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

## التمرين الرابع: (07 نقاط)




**I-** $g$ الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي $x$ المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$g(x) = \dfrac{1}{x} - (\ln x)^2 - \ln x - 1$ و $(C_g)$ المنحنى البياني الممثل لها

كما هو مبيّن في الشكل المقابل:

- احسب $g(1)$ ثم استنتج بيانيا إشارة $g(x)$.

**II-** $f$ الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي $x$ المعرفة على $]0;+\infty[$

بـ: $f(x) = \dfrac{1 + \ln x}{1 + x\ln x}$ تمثيلها البياني في مستو منسوب $(C_f)$

إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

**1)** احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و بيّن أنّ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

ثم فسّر النتيجتين بيانيا.

**2)** أ) بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(1 + x\ln x)^2}$.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ و شكل جدول تغيراتها.

**3)** بيّن أنّ $y = \left(\dfrac{e^2}{e-1}\right)x - \dfrac{e}{e-1}$ هي معادلة لـ$(T)$ مماس المنحنى $(C_f)$ في نقطة تقاطعه مع حامل محور الفواصل، ثم ارسم المماس $(T)$ و المنحنى $(C_f)$.

**4)** عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي $m$ بحيث تقبل المعادلة $(e-1)f(x) = e^2x - me$ حلّين متمايزين.

**III-** $n$ عدد طبيعي حيث $n > 1$ ، $I_n$ مساحة الحيز من المستوي المحدد بحامل محور الفواصل و المنحنى $(C_f)$ والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 1$ و $x = n$.

**1)** بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ حيث $n > 1$ : $I_n = \ln(1 + n\ln n)$.

**2)** ادرس اتجاه تغير المتتالية $(I_n)$.

**انتهى الموضوع الثاني**