

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 11 كرتة متماثلة لا نفرق بينها باللمس موزعة كما يلي: كرتتان بيضاوان مرقمتان ب: 1 ، 3 وأربع كرتات حمراء مرقمة ب: 0 ، 1 ، 1 ، 3 وخمس كرتات خضراء مرقمة ب: 0 ، 1 ، 1 ، 3 ، 4 (I) نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كرتات من الكيس ونعتبر الحوادث الآتية:

" A : الحصول على 3 كرتات من نفس اللون " ، " B : الحصول على 3 كرتات جُداء أرقامها عدد فردي "

" C : الحصول على 3 كرتات جُداء أرقامها عدد زوجي "

(1) أ) احسب $P(A)$ احتمال الحادثة A و بين أن: $P(B) = \frac{56}{165}$ ثم استنتج $P(C)$

ب) احسب الاحتمال الشرطي $P_A(B)$

(2) المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لثلاث كرتات، عدد الكرتات التي تحمل رقما زوجيا.

أ) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضياتي $E(X)$

ب) احسب احتمال الحادثة $(X > 1)$

(II) نسحب الآن من الكيس عشوائيا 3 كرتات على التوالي وبدون إرجاع.

- احسب احتمال الحادثة D : " الحصول على 3 كرتات جُداء أرقامها معدوم "

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z الآتية:

$$(z - 1 + 2\sqrt{3})[z^2 - 2(1 - \sqrt{3})z + 5 - 2\sqrt{3}] = 0$$

(II) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(0; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B ، C

التي لاحقاتها على الترتيب z_A ، z_B ، z_C حيث: $z_A = 1 - \sqrt{3} + i$ ، $z_B = 1 - 2\sqrt{3}$ و $z_C = \bar{z}_A$

(1) اكتب كلاً من $z_A - 1$ ، $z_C - 1$ و z_B على الشكل المثلثي.

(2) جد لاحقة النقطة D مرجح الجملة المثقلة $\{(A; 1), (B; -1), (C; 1)\}$

(3) بين أن الرباعي ABCD معين.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 5 قطع كهربائية غير متمایزة ولا نفرق بينها باللمس، منها 3 قطع سليمة وقطعتان غير سليمتين.

نرمز إلى القطعة السليمة بالرمز S وإلى القطعة غير السليمة بالرمز \bar{S}

نسحب عشوائيا من الكيس 3 قطع على التوالي مع الإرجاع ، ونعتبر الحوادث:

A : " القطعة الأولى المسحوبة سليمة " ، B : " سحب قطعة واحدة فقط سليمة "

C : " القطعة الثالثة المسحوبة سليمة "

(1) شكّل شجرة الاحتمالات التي تُتمذج هذه التجربة.

(2) احسب $P(A)$ ، $P(B)$ احتمالي الحادثتين A و B ثم بيّن أنّ: $P(C) = \frac{3}{5}$

(3) احسب الاحتمال الشرطي $P_C(A)$ ، هل الحادثتان A و C مستقلتان ؟

(4) نُرفق بكل قطعة سليمة العدد 10 وبكل قطعة غير سليمة العدد -10 ، ونعتبر X المتغير العشوائي الذي

يرفق بكل عملية سحب من الكيس لثلاث قطع مجموع الأعداد المرفقة بها.

(أ) بَرّر أنّ قيم المتغير العشوائي X هي: -30 ، -10 ، 10 ، 30

(ب) عيّن قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضي $E(X)$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة مع التبرير في كل حالة مما يلي:

(1) z عدد مركب مرافقه \bar{z} ، مرافق العدد المركب $z+i$ هو:

(أ) $\bar{z}-i$ (ب) $\bar{z}+i$ (ج) $z-i$

(2) العدد المركب $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2024}$ يساوي: (أ) 1 (ب) i (ج) -1

(3) z عدد مركب حيث $z = 2(1+i\sqrt{3})$

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، نضع: $S_n = \ln|z| + \ln|z|^2 + \dots + \ln|z|^n$ ، لدينا:

(أ) $S_n = (n+1)^2 \ln 2$ (ب) $S_n = n(n+1) \ln 2$ (ج) $S_n = 2 \left(\frac{1-(2 \ln 2)^n}{1-2 \ln 2} \right) \ln 2$

(4) z عدد مركب حيث: $z = \sin \frac{\pi}{8} + i \cos \frac{\pi}{8}$ ، الشكل المثلثي للعدد المركب z هو:

(أ) $-\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}$ (ب) $\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}$ (ج) $\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8}$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(1) f الدالة العددية المعرفة على المجال $[2; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{x+1}{2x}$

- شكّل جدول تغيرات الدالة f ثم استنتج أنّه من أجل كل x من $[2; +\infty[$ فإن $\frac{1}{2} < f(x) \leq \frac{3}{4}$

(2) (u_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ بـ : $u_n = \frac{n}{2^n}$

(أ) بين أنه: من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $n \geq 2$ فإن $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{3}{4}$

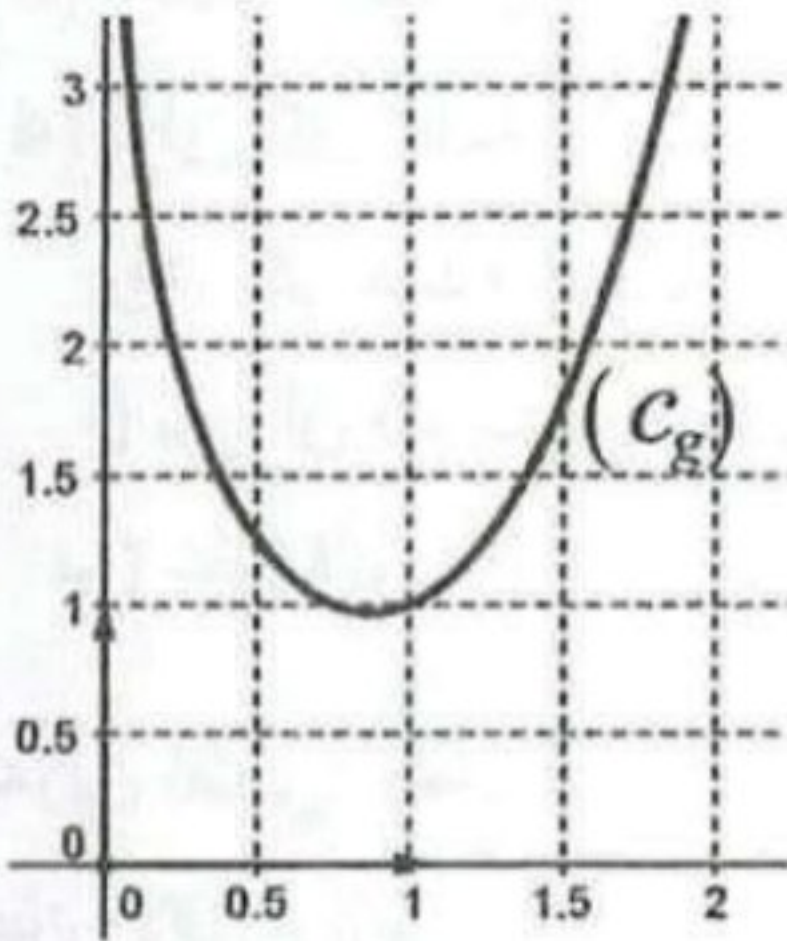
(ب) أثبت أنه: من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $n \geq 2$ فإن $u_n \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$ ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(ج) نضع من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $n \geq 2$: $S_n = \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{3} + \dots + \frac{u_n}{n}$

- بين أن: $S_n = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$ ثم عين العدد الطبيعي n حتى يكون $S_n = \frac{511}{1024}$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) g الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2} - \ln x$ ، (C_g) تمثيلها البياني كما في الشكل.



- بقراءة بيانية ، عين إشارة $g(x)$

(II) f الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = -x - \frac{\ln x}{x^2}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد

والمجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، (وحدة الطول 2cm).

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) (أ) بين أنه من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ فإن $f'(x) = \frac{-2g(x)}{x^3}$

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

(ج) أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,7 < \alpha < 0,71$

(3) (أ) بين أن المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) ، يطلب تعيين معادلة له.

(ب) ادرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمستقيم (Δ)

(4) بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه -1 ، يطلب تعيين معادلة له.

(5) (أ) ارسم كلاً من (Δ) ، (T) و (C_f)

(ب) m وسيط حقيقي ، عين بياناً قيم m التي من أجلها تقبل المعادلة: $\frac{\ln x}{x^2} = m$ حلين مختلفين.

(6) (أ) أثبت أن الدالة $H : x \mapsto \frac{-1 - \ln x}{x}$ هي دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$ على $]0; +\infty[$

(ب) $\mathcal{A}(\alpha)$ المساحة بالسنتيمتر المربع للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيمتين

التي معادلاتها: $x=1$ ، $x=\alpha$ ، $y=-x$

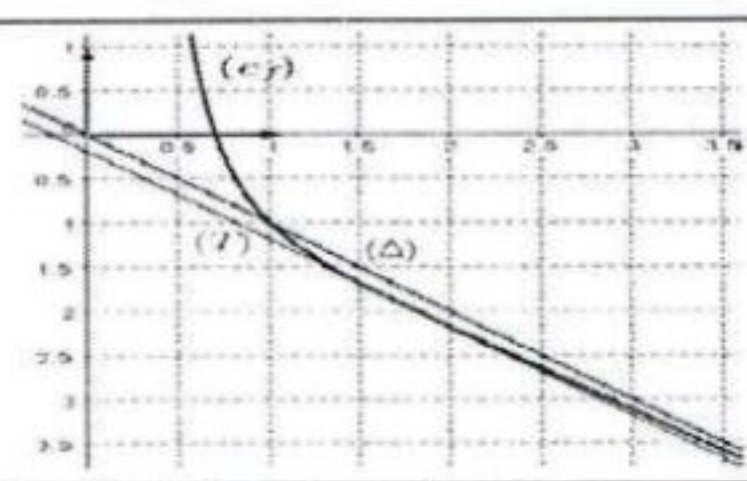
- بين أن: $\mathcal{A}(\alpha) = 4\left(\alpha^2 - \frac{1}{\alpha} + 1\right)$

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الأول)											
العلامة	مجزأة												
التمرين الأول (04 نقاط)													
1,75	0,5 × 2	$P(B) = \frac{C_8^3}{C_{11}^3} = \frac{56}{165} \quad , \quad P(A) = \frac{C_4^3 + C_5^3}{C_{11}^3} = \frac{14}{165} \quad (i)$ $P(C) = 1 - P(B) = \frac{109}{165}$	(1 (I										
	0,25												
	0,5	$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{7} \quad (ب)$											
1,75	0,25 × 4	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x_i</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>$P(X=x_i)$</td> <td>$\frac{56}{165}$</td> <td>$\frac{84}{165}$</td> <td>$\frac{24}{165}$</td> <td>$\frac{1}{165}$</td> </tr> </table>	x_i	0	1	2	3	$P(X=x_i)$	$\frac{56}{165}$	$\frac{84}{165}$	$\frac{24}{165}$	$\frac{1}{165}$	(2
	x_i	0	1	2	3								
	$P(X=x_i)$	$\frac{56}{165}$	$\frac{84}{165}$	$\frac{24}{165}$	$\frac{1}{165}$								
0,25	$E(X) = \frac{9}{11}$												
0,5	$P(X > 1) = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{5}{33} \quad (ب)$												
0,5	0,5	$P(D) = 1 - P(\bar{D}) = 1 - \frac{A_9^3}{A_{11}^3} = \frac{27}{55}$ $P(D) = \frac{3A_2^1 \times A_9^2 + 3A_2^2 \times A_9^1}{A_{11}^3} = \frac{27}{55} \quad \text{أو}$	(II										
التمرين الثاني (04 نقاط)													
1,5	0,5 × 3	$S = \{1 - 2\sqrt{3}; 1 - \sqrt{3} - i; 1 - \sqrt{3} + i\}$	(I										
1,5	0,5 × 3	$z_A - 1 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$	(1 (II										
		$z_C - 1 = 2 \left(\cos \left(-\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{5\pi}{6} \right) \right)$											
		$z_B = (2\sqrt{3} - 1)(\cos \pi + i \sin \pi)$											
0,5	0,5	$z_D = \frac{z_A - z_B + z_C}{1 - 1 + 1} = 1$	(2										
0,5	0,5	$ABCD \text{ معين } (AB = AD = 2 \text{ و } ABCD \text{ متوازي أضلاع})$	(3										
التمرين الثالث (05 نقاط)													
1,75	0,25 × 3	$u_3 = \frac{7}{5} \text{ و } u_2 = \frac{1}{2} \text{ ، } u_1 = 2$	(1										
	0,75 + 0,25	$0 \leq u_n \leq 2 : N \text{ من } n \text{ كل من أجل أنه من التراجع أنه من أجل كل } n \text{ من } N : 0 \leq u_n \leq 2$											

2,25	0,5 + 0,75	$v_n = -\frac{1}{4}\left(-\frac{2}{3}\right)^n$ ، $v_{n+1} = -\frac{2}{3}v_n$ (أ)	(2)							
	0,5	$u_n = \frac{5}{1-v_n} - 4$ (ب)								
	0,5	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{1 + \frac{1}{4}\left(-\frac{2}{3}\right)^n} - 4 \right) = 1$								
1	0,5 0,25 × 2	$S_n = -\frac{3}{20}\left(-\frac{2}{3}\right)^n \left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{2025}\right)$ $T_n = 405 + \frac{3}{100}\left(-\frac{2}{3}\right)^n \left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{2025}\right)$ ومنه $T_n = \frac{1}{5}(2025 - S_n)$	(3)							
التمرين الرابع (07 نقاط)										
0,75	0,5 + 0,25	$g(x) < 0$ فإن \mathbb{R} من أجل كل x ، $g(1) = -1$	(I)							
1,75	0,5 + 0,25	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ (أ)	(1 (II)							
	0,25	$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-2x + 3)] = 0$ (ب)								
	0,75	لما $x < 0$: (C_f) أعلى (Δ) و لما $x > 0$: (C_f) أسفل (Δ) $(\Delta) \cap (C_f) = \{I(0;3)\}$								
1	0,5	$f'(x) = g(x) - e^{-x+1}$ (أ)	(2)							
	0,25	f متناقصة تماما على \mathbb{R} (ب)								
	0,25	جدول التغيرات <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$f'(x)$</td> <td></td> <td>-</td> </tr> <tr> <td>$f(x)$</td> <td>$+\infty$</td> <td>$-\infty$</td> </tr> </table>		x	$-\infty$	$+\infty$	$f'(x)$		-	$f(x)$
x	$-\infty$	$+\infty$								
$f'(x)$		-								
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$								
0,75	0,5 + 0,25	$f'(x) = -2$ تكافئ $x = 1$ ، معادلة (T) : $y = -2x + 2$	(3)							
1,75	0,25 × 2	(أ) الرسم رسم (Δ) و (T) رسم (C_f)	(4)							
	0,5	(ب) تقبل المعادلة $f(x) = -2x + m$ حلين مختلفين لما $2 < m < 3$								
1	0,5	(أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة، نجد: $\int_0^1 x e^{-x+1} dx = e - 2$	(5)							
	0,5	(ب) $\int_0^1 (-2x + 3 - f(x)) dx = e - 2$ ومنه: $\mathcal{A} = 4(e - 2) \text{ cm}^2$								

ملاحظة: تُقبل جميع طرائق الحل الصحيحة مع التقيد بسلم التنقيط.

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)										
العلامة	مجزأة											
التمرين الأول (04 نقاط)												
0,5	0,5	<p>شجرة الاحتمالات</p>	(1)									
2,25	0,5 × 3	$P(B) = 3 \left(\frac{3}{5}\right) \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{36}{125} \quad , \quad P(A) = \frac{3}{5}$ $P(C) = \left(\frac{3}{5}\right)^3 + \left(\frac{3}{5}\right) \left(\frac{2}{5}\right)^2 + 2 \left(\frac{3}{5}\right)^2 \left(\frac{2}{5}\right) = \frac{3}{5}$	(2)									
	0,25 × 3	$P_C(A) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{3}{5} \quad \text{و} \quad P(A \cap C) = \left(\frac{3}{5}\right)^3 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 \left(\frac{2}{5}\right) = \frac{9}{25}$ <p>A و C مستقلتان: $P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$ أو $P_C(A) = P(A)$</p>	(3)									
1,25	0,25	(أ) تبرير أن قيم المتغير العشوائي هي: -30 ، -10 ، 10 ، 30 .	(4)									
	0,75	(ب) قانون الاحتمال:										
	0,25	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x_i</td> <td>-30</td> <td>-10</td> <td>10</td> <td>30</td> </tr> <tr> <td>$P(X=x_i)$</td> <td>$\frac{8}{125}$</td> <td>$\frac{36}{125}$</td> <td>$\frac{54}{125}$</td> <td>$\frac{27}{125}$</td> </tr> </table> <p style="text-align: center;">الأمّل الرياضياتي: $E(X) = 6$</p>		x_i	-30	-10	10	30	$P(X=x_i)$	$\frac{8}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{54}{125}$
x_i	-30	-10	10	30								
$P(X=x_i)$	$\frac{8}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{27}{125}$								
التمرين الثاني (04 نقاط)												
1	0,5 × 2	$\overline{z+i} = \overline{z} - i$ (الإجابة: أ)	(1)									
1	0,5 × 2	$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2024} = (i)^{2024} = 1$ (الإجابة: أ)	(2)									
1	0,5 × 2	$S_n = 2 \ln 2 (1+2+\dots+n) = n(n+1) \ln 2$ (ب) (الإجابة: ب)	(3)									
1	0,5 × 2	$z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \cos\frac{3\pi}{8} + i \sin\frac{3\pi}{8}$ (ج) (الإجابة: ج)	(4)									
التمرين الثالث (05 نقاط)												
1,5	0,25 × 4	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x</td> <td>2</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$f'(x)$</td> <td></td> <td>-</td> </tr> <tr> <td>$f(x)$</td> <td>$\frac{3}{4}$</td> <td>$\frac{1}{2}$</td> </tr> </table> <p style="text-align: center;">- جدول تغيرات الدالة f</p>	x	2	$+\infty$	$f'(x)$		-	$f(x)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	(1)
x	2	$+\infty$										
$f'(x)$		-										
$f(x)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$										
	0,5	- استنتاج أن: من أجل كل $x \in [2; +\infty[$ فإن $\frac{1}{2} < f(x) \leq \frac{3}{4}$										

2	0,75	(أ) من أجل كل n من \mathbb{N} ، $n \geq 2$ فإن $\frac{u_{n+1}}{u_n} = f(n)$ ومنه $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{3}{4}$	(2)									
	0,75+0,25	(ب) برهان أنه من أجل كل n من \mathbb{N} حيث $2 \leq n$: $u_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$										
	0,25	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ ، يمكن استعمال $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{e^{n \ln 2}} = 0$										
1,5	0,5+1	(ج) $S_n = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$ ، $S_n = \frac{511}{1024}$ تعني: $n = 10$										
التمرين الرابع (07 نقاط)												
0,5	0,5	$g(x)$ موجب تماما على المجال $]0; +\infty[$	(I)									
0,5	0,5	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$	(1(II)									
1,75	0,5	(أ) $f'(x) = \frac{-2g(x)}{x^3}$	(2)									
	0,25	(ب) الدالة f متناقصة تماما على $]0; +\infty[$										
	0,25	جدول التغيرات										
		<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td>x</td> <td>0</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$f'(x)$</td> <td></td> <td>-</td> </tr> <tr> <td>$f(x)$</td> <td>$+\infty$</td> <td>$-\infty$</td> </tr> </table>	x	0	$+\infty$	$f'(x)$		-	$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$	
x	0	$+\infty$										
$f'(x)$		-										
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$										
	0,75	(ج) f مستمرة و متناقصة تماما على $[0,7; 0,71]$ و $f(0,7) \times f(0,71) < 0$ ومنه $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,7 < \alpha < 0,71$										
0,75	0,25	(أ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) = 0$ ومنه $y = -x$: مستقيم مقارب مائل لـ (C_f)	(3)									
	0,5	(ب) من $f(x) + x = \frac{-\ln x}{x^2}$ نجد: (C_f) أعلى (Δ) على $]0; 1[$ وأسفل (Δ) على $]1; +\infty[$ ويقطعه في النقطة $A(1; -1)$										
0,75	0,5+0,25	$f'(x) = -1$ تكافئ $x = \sqrt{e}$ ، ومعادلة لـ (T) : $y = -x - \frac{1}{2e}$	(4)									
1,5	0,25 × 2	(أ) الرسم. رسم (Δ) و (T) رسم (C_f)	(5)									
	0,5											
	0,5	(ب) للمعادلة: $\frac{\ln x}{x^2} = m$ حلان مختلفان لما $0 < m < \frac{1}{2e}$										
1,25	0,5	(أ) من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $H'(x) = h(x)$	(6)									
	0,5	(ب) $\int_{\alpha}^1 \frac{-\ln x}{x^2} dx = H(\alpha) - H(1) = \frac{-1 - \ln \alpha}{\alpha} + 1$										
	0,25	من $f(\alpha) = 0$ نجد: $\ln \alpha = -\alpha^3$ ومنه $A(\alpha) = 4\left(\alpha^2 - \frac{1}{\alpha} + 1\right)$										

ملاحظة: تُقبل جميع طرائق الحل الصحيحة مع التقيد بسلم التنقيط.